

שאלות תיאורטיות במד"רהמשפט של קווי פאזה של מערכת אוטונומית:

המשפט: דרך כל נקודה במרחב פאזה עובר קו פאזה אחד.

הוכחה:

- **טענת עזר:** אם $\varphi(t)$ פתרון של $\dot{x} = f(x)$ אז גם $\varphi_s(t) = \varphi(t + s)$ פתרון:

הוכחה:

$$\circ \text{ שוויון נגזרות לפי כלל השרשרת: } \frac{d}{dt} \varphi_s(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t + s) = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d(t+s)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\circ f(\varphi) = f(\varphi_s) \text{ ולכן } \dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}$$

- נניח קיימים שני פתרונות φ, ψ ושתי נקודות $a, b \in \mathbb{R}^{n+1}$ כך ש- $\varphi(a) = \psi(b)$ וגם $Im(\varphi) \neq Im(\psi)$.

- נגדיר פונקציה חדשה $\varphi_{a-b} = \varphi(t + a - b)$, ולפי טענת העזר גם φ_{a-b} פתרון.

- מתקיים: $\varphi_{a-b}(b) = \varphi(a - b + b) = \varphi(a) = \psi(b)$, ולפי משפט היחידות: $\varphi_{a-b} \equiv \psi$.

- מתקיים: $Im(\varphi_{a-b}) = Im(\varphi)$, ולכן $Im(\varphi) = Im(\psi)$ - בסתירה להנחה.

$$\square \varphi \equiv \psi \Leftarrow$$

משפט הקיום והיחידות:

המשפט:

$$: \varphi(t), x_0 \in U, f'_x, f \in C(U), x' = f(t, x)$$

- קיים.

- יחיד.

- עבור $\varphi(t, x)$ פתרון לבעיית ההתחלה $\varphi(t_0) = x_0$ או $\varphi(t, x) \in C(U)$ (רציפה ביחס ל- x).

נקודות חשובות בהוכחה:

- φ היא פתרון למד"ר אמ"מ φ היא נקודת שבת של העתקת פיקרד: $(A\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f[\tau, \varphi(\tau)] d\tau$.

- מגדירים במרחב הפאזי גליל $Z \subseteq U$ שהוא קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה). מכאן: $f, f'_x \in C(Z)$.

$$Z = \{(t, x) \in U \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

- לפי משפט ווירשטרס מקבלת את המקסימום. נסמן:

$$\circ c := \max_Z |f|$$

$$\circ L := \max_Z |f'_x|$$

- מגדירים חרוט $\{h \mid |t - t_0| \leq a', |x - x_0| \leq c \cdot |t - t_0|\}$, והזזה של החרוט תסומן k_x כך ש- $|x - x_0| \leq b'$ (הזזה ב- b').

- מגדירים מרחב מטרי: $M = \{h: k_x \rightarrow \mathbb{R} \mid h(t, x) \leq c \cdot |t - t_0|, h \in C(k_x)\}$.

- מגדירים מטריקה ב- M : $\rho(h_1, h_2) = \max_{\substack{|t-t_0| \leq a' \\ |x-x_0| \leq b'}} |h_1(t, x) - h_2(t, x)|$.

- מגדירים את ההעתקה: $(Ah)(t, x) = \int_{t_0}^t f[\tau, x + h(\tau, x)] d\tau$.

- מוכיחים ש- (M, ρ) מרחב מטרי שלם, ע"י הוכחה שסדרה h_n כלשהי מ- M היא סדרת קושי.

- מוכיחים ש- $A(M) \subseteq M$, כלומר ש- $A: M \rightarrow M$.

- מוכיחים ש- A העתקה מכווצת.

$$\Leftarrow \text{כיוון ש-} A \text{ מכווצת במרחב מטרי שלם, אזי קיימת לה נקודת שבת יחידה, שהיא } h(t, x) = \int_{t_0}^t f[\tau, x + h(\tau, x)] d\tau$$

- לוקחים את $\varphi(t, x) = x + h(t, x)$, ומקבלים ש- φ היא פתרון לבעיית ההתחלה $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ \varphi(t_0) = x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$, וכיוון ש- h יחידה, אזי φ פתרון יחיד. \square

המשפט של העתקות מכווצות במרחב מטרי:

העתקה מכווצת: מקיימת $0 \leq \lambda < 1$, $\rho(Ax, Ay) \leq \lambda \cdot \rho(x, y)$

סדרת קושי: a_n סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $n, m > N_\varepsilon$ מתקיים: $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$.

המשפט: יהי (M, ρ) מרחב מטרי שלם, $A: M \rightarrow M$ העתקה מכווצת. אזי:

- קיימת ל- A נקודת שבת.

- נקודה זו יחידה.

הוכחה:

- תהי A העתקה מכווצת עם מקדם λ כמוגדר לעיל.

- יהי $x \in M$ כלשהו, עבורו נגדיר את הסדרה $A^n x$ באופן הבא: x, Ax, A^2x, \dots .

- הוכחה כי $A^n x$ היא סדרת קושי:

○ יהי $d := \rho(x, Ax)$, אזי: $\rho(A^n x, A^{n+1} x) \leq \lambda^n \rho(x, Ax) = \lambda^n \cdot d$, כיוון ש- A העתקה מכווצת.

○ עבור $m = n + k$ נראה כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A^n x, A^{n+k} x) = 0$ (השווה ל- $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(A^n x, A^{n+k} x)$):

$$\rho(A^n x, A^{n+k} x) \leq \lambda^n \cdot \rho(x, A^k x) \leq$$

$$\rho(x, A^k x) \stackrel{\text{אשכ"ש}}{\leq} \rho(x, Ax) + \rho(Ax, A^2x) \stackrel{\text{מכווצת } A}{\leq} d + \lambda \cdot \rho(x, A^{k-1} x) \stackrel{\text{אשכ"ש}}{\leq} d + \lambda d + \rho(Ax, A^{k-1} x) \leq \dots \leq d(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1})$$

$$\leq \lambda^n \cdot d \cdot (1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-1}) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(A^n x, A^{n+k} x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^n \cdot d \cdot (1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} d(1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-1}) =$$

$$= 0 \cdot d \cdot \frac{1}{1 - \lambda} = 0 \Rightarrow A^n x \text{ סדרת קושי}$$

- כיוון ש- M מרחב מטרי שלם, אז $X := \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x \in M$.

- הוכחה כי X נקודת שבת של A , כלומר: $AX = X$.

A העתקה מכווצת ולכן היא רציפה, ולכן מתקיים: $AX = A \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x \stackrel{\text{רציפה } A}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} A^{n+1} x = X$. מכאן $AX = X$.

- הוכחת יחידות נקודת השבת:

○ נניח קיימת $Y \neq X$ כך ש- $AY = Y$.

○ כיוון ש- X, Y נקודות שבת, אז לכל n מתקיים: $\rho(X, Y) = \rho(A^n X, A^n Y)$. מכאן:

$$\rho(X, Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A^n X, A^n Y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^n \rho(X, Y) = 0 \Rightarrow \rho(X, Y) = 0$$

□

○ מתכונות ρ מתקבל ש- $X = Y$, כלומר אותה נקודה.

הוכחה שהאופרטור המופיע בתהליך Picard הינו העתקה מכווצת: לא צריך לדעת (היה במבחן לדוגמא, אמר שלא יהיה במבחן)

הוכחה שהמרחב הוקטורי של אופרטורים ב- \mathbb{R}^n הוא מרחב מטרי שלם:

צריך להוכיח:

תהי L מרחב כל האופרטורים $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, אז $(L, \|\cdot\|)$ הוא מרחב מטרי שלם, כאשר: $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

הוכחה:

- תהי A_i סדרת קושי $(A_i \subseteq L)$, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $n, m > N_\varepsilon$ מתקיים: $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$. נוכיח שהגבול $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \in L$.
- יהי $x \in \mathbb{R}^n$, עבורו נגדיר את הסדרה: $x_i := A_i x$.
- הוכחה ש- x_i היא סדרת קושי: יהי ε :

$$\|x_n - x_m\| = \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq$$

מהגדרת נורמת אופרטור: $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ מתקבל: $\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$. מכאן:

$$\leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\|$$

כיוון שקיבענו את x , הגענו ל- $const \cdot \varepsilon$ ולכן x_i אכן סדרת קושי.

- ידוע כי \mathbb{R}^n מרחב מטרי שלם, וכיוון ש- x_i סדרת קושי מתקיים: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}^n$, ו- y הוא פונקציה של x .
- הוכחה ש- y היא פונקציה לינארית:

○ סגירות לחיבור: $y(x' + x'') = \lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n + x''_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n + \lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = y(x') + y(x'')$

○ סגירות לכפל בסקלר: $y(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lambda \cdot y(x)$

← קיים אופרטור A כך ש: $Ax = y(x)$, כלומר: $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$.

- הוכחה ש- $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$: נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $i > N_\varepsilon$ מתקיים: $\|A - A_i\| < \varepsilon$:

$$\|A_i - A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|(A_i - A)x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A_i x - Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|x_i - y(x)\|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon \cdot \|x\|}{\|x\|} = \varepsilon$$

← $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ ולכן A_i סדרת קושי.

□ L מרחב מטרי שלם