שאלות תיאורטיות במד״ר

<u>המשפט של קווי פאזה של מערכת אוטונומית</u>:

המשפט: דרך כל נקודה במרחב פאזה עובר קו פאזה אחד.

הוכחה:

- <u>טענת עזר</u>: אם $\varphi(t)$ פתרון של $\dot{x}=f(x)$ אז גם $\varphi_s(t)=\varphi(t+s)$ פתרון:
  <u>הוכחה</u>:
  - שוויון נגזרות לפי כלל השרשרת: $\frac{d\varphi_s}{dt}=\frac{d}{dt}\varphi(t+s)=\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d(t+s)}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}$. מכאן: $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_s$
  - $f(x)$ אינה תלויה ב-t ולכן $f(\varphi)=f(\varphi_s)$
- נניח קיימים שני פתרונות φ,ψ ושתי נקודות $a,b\in\mathbb{R}^{n+1}$ כך ש-$\varphi(a)=\psi(b)$ וגם $Im(\varphi)\neq Im(\psi)$.
- נגדיר פונקציה חדשה $\varphi_{a-b}=\varphi(t+a-b)$, ולפי טענת העזר גם φ_{a-b} פתרון.
- מתקיים: $\varphi_{a-b}(b)=\varphi(a-b+b)=\varphi(a)=\psi(b)$, ולפי משפט היחידות: $\varphi_{a-b}\equiv\psi$.
- מתקיים: $Im(\varphi_{a-b})=Im(\varphi)$, ולכן $Im(\varphi)=Im(\psi)$ - בסתירה להנחה.

$\Leftarrow \varphi\equiv\psi$ □

<u>משפט הקיום והיחידות</u>:

המשפט:

$x'=f(t,x)$, $f,f'_x\in C(U)$, $(t_0,x_0)\in U$, אזי הפתרון $\varphi(t)$:

- קיים.
- יחיד.
- עבור $\varphi(t,x)$ פתרון לבעיית ההתחלה $\varphi(t_0)=x_0$ אז $\varphi(t,x)\in C(U)$ (רציפה ביחס ל-x).

נקודות חשובות בהוכחה:

- φ היא פתרון למד״ר אמ״מ φ היא נקודת שבת של העתקת פיקרד: $(A\varphi)(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f[\tau,\varphi(\tau)]d\tau$.
- מגדירים במרחב הפאזי גליל $Z\subseteq U$ שהוא קבוצה קומפקטית (סגורה וחסומה). מכאן: $f,f'_x\in C(Z)$:
  $Z=\{(t,x)\in U|\ |t-t_0|\leq a,|x-x_0|\leq b\}$
- לפי משפט ויירשטרס f מקבלת את המקסימום. נסמן:
  - $c\coloneqq\max_Z|f|$
  - $L\coloneqq\max_Z|f'_x|$
- מגדירים חרוט $k_0=\{(t,x)|\ |t-t_0|\leq a',|x-x_0|\leq c\cdot|t-t_0|\}$, והזזה של החרוט תסומן k_x כך ש-$|x-x_0|\leq b'$ (הזזה ב-b').
- מגדירים מרחב מטרי: $M=\{h:k_x\to\mathbb{R}|\ h(t,x)\leq c\cdot|t-t_0|,h\in C(k_x)\}$.
- מגדירים מטריקה ב-M: $\rho(h_1,h_2)=\max_{\substack{|t-t_0|\leq a'\\|x-x_0|\leq b'}}|h_1(t,x)-h_2(t,x)|$.
- מגדירים את ההעתקה: $(Ah)(t,x)=\int_{t_0}^{t}f[\tau,x+h(\tau,x)]d\tau$.
- מוכיחים ש-(M,ρ) מרחב מטרי שלם, ע״י הוכחה שסדרה h_n כלשהי מ-M היא סדרת קושי.
- מוכיחים ש-$A(M)\subseteq M$, כלומר ש-$A:M\to M$.
- מוכיחים ש-A העתקה מכווצת.

$\Leftarrow$ כיוון ש-A מכווצת במרחב מטרי שלם, אזי קיימת לה נקודת שבת יחידה, שהיא $h(t,x)=\int_{t_0}^{t}f[\tau,x+h(\tau,x)]d\tau$

- לוקחים את $\varphi(t,x)=x+h(t,x)$, ומקבלים ש-φ היא פתרון לבעיית ההתחלה $\begin{cases}x'=f(t,x)\\\varphi(t_0)=x,\forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$, וכיוון ש-$h$ יחידה, אזי φ פתרון יחיד. □

<u>המשפט של העתקות מכווצות במרחב מטרי</u>:

<u>העתקה מכווצת</u>: מקיימת $0 \le \lambda < 1,\ \rho(Ax, Ay) \le \lambda \cdot \rho(x,y)$

<u>סדרת קושי</u>: a_n סדרת קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $n, m > N_\varepsilon$ מתקיים: $\rho(a_n, a_m) < \varepsilon$.

המשפט: יהי (M, ρ) מרחב מטרי שלם, $A: M \to M$ העתקה מכווצת. אזי:

- קיימת ל-A נקודת שבת.
- נקודה זו יחידה.

הוכחה:

- תהי A העתקה מכווצת עם מקדם λ כמוגדר לעיל.
- יהי $x \in M$ כלשהו, עבורו נגדיר את הסדרה $A^n x$ באופן הבא: $x, Ax, A^2x, \dots$.
- <u>הוכחה כי $A^n x$ היא סדרת קושי</u>:
  - יהי $d := \rho(x, Ax)$, אזי: $\rho(A^n x, A^{n+1} x) \le \lambda^n \rho(x, Ax) = \lambda^n \cdot d$, כיוון ש-$A$ העתקה מכווצת.
  - עבור $m = n + k$ נראה כי $\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} \rho(A^n x, A^{n+k} x) = 0$ (השווה ל-$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \rho(A^n x, A^{n+k} x)$):

$$\rho(A^n x, A^{n+k} x) \le \lambda^n \cdot \rho(x, A^k x) \boxed{\le}$$

$$\rho(x, A^k x) \underset{\text{אשמ"ש}}{\le} \underbrace{\rho(x, Ax)}_{=d} + \rho(Ax, A^k x) \underset{A\ \text{מכווצת}}{\le} d + \lambda \cdot \rho(x, A^{k-1} x) \underset{\text{אשמ"ש}}{\le} d + \lambda d + \rho(Ax, A^{k-1} x) \le \dots \le d(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{k-1})$$

$$\boxed{\le} \lambda^n \cdot d \cdot (1 + \lambda + \cdots \lambda^{k-1}) \Rightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} \rho(A^n x, A^{n+k} x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}} \lambda^n \cdot d \cdot (1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \lambda^n \cdot \lim_{k\to\infty} d(1 + \lambda + \dots + \lambda^{k-1}) =$$

$$= 0 \cdot d \cdot \frac{1}{1 - \lambda} = 0 \Rightarrow \text{ סדרת קושי } A^n x$$

- כיוון ש-M מרחב מטרי שלם, אז $X := \lim_{n\to\infty} A^n x \in M$.
- <u>הוכחה כי X נקודת שבת של A, כלומר: $AX = X$</u>:

  A העתקה מכווצת ולכן היא רציפה, ולכן מתקיים: $AX = A \cdot \lim_{n\to\infty} A^n x \underset{A\ \text{רציפה}}{=} \lim_{n\to\infty} A^{n+1} x = X$. מכאן $AX = X$.
- <u>הוכחת יחידות נקודת השבת</u>:
  - נניח קיימת $Y \neq X$ כך ש-$AY = Y$.
  - כיוון ש-X, Y נקודות שבת, אז לכל n מתקיים: $\rho(X, Y) = \rho(A^n X, A^n Y)$. מכאן:

$$\rho(X, Y) = \lim_{n\to\infty} \rho(A^n X, A^n Y) \underset{A\ \text{מכווצת}}{\le} \lim_{n\to\infty} \lambda^n \rho(X, Y) = 0 \Rightarrow \rho(X, Y) = 0$$

  - מתכונות ρ מתקבל ש-$X = Y$, כלומר אותה נקודה. □

<u>הוכחה שהאופרטור המופיע בתהליך *Picard* הינו העתקה מכווצת</u>: לא צריך לדעת (היה במבחן לדוגמא, אמר שלא יהיה במבחן)

<u>הוכחה שהמרחב הוקטורי של אופרטורים ב-$\mathbb{R}^n$ הוא מרחב מטרי שלם</u>:

צריך להוכיח:

תהי L מרחב כל האופרטורים $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, אז $(L, \|\cdot\|)$ הוא מרחב מטרי שלם, כאשר: $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

הוכחה:

- תהי A_i סדרת קושי ($A_i \subseteq L$), כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $n, m > N_\varepsilon$ מתקיים: $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$. נוכיח שהגבול $\lim_{k\to\infty} A_k \in L$.
- יהי $x \in \mathbb{R}^n$, עבורו נגדיר את הסדרה: $x_i \coloneqq A_i x$.
- <u>הוכחה ש-x_i היא סדרת קושי</u>: יהי ε:

$$\|x_n - x_m\| = \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \boxed{\leq}$$

מהגדרת נורמת אופרטור: $\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ מתקבל: $\|A\| \cdot \|x\| \geq \|Ax\|$. מכאן:

$$\boxed{\leq} \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \cdot \|x\|$$

כיוון שקיבענו את x, הגענו ל-$\varepsilon \cdot const$ ולכן x_i אכן סדרת קושי.

- ידוע כי $\mathbb{R}^n$ מרחב מטרי שלם, וכיוון ש-x_i סדרת קושי מתקיים: $y(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}^n$, ו-$y$ הוא היא פונקציה של x.
- <u>הוכחה ש-y היא פונקציה לינארית</u>:
  - <u>סגירות לחיבור</u>: $y(x' + x'') = \lim_{n\to\infty}(x_n' + x_n'') = \lim_{n\to\infty} x_n' + \lim_{n\to\infty} x_n'' = y(x') + y(x'')$
  - <u>סגירות לכפל בסקלר</u>: $y(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = \lambda \cdot y(x)$

  $\Leftarrow$ קיים אופרטור A כך ש: $Ax = y(x)$, כלומר: $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$.
- הוכחה ש-$A = \lim_{n\to\infty} A_n$: נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_ε כך שלכל $i > N_\varepsilon$ מתקיים: $\|A - A_i\| < \varepsilon$:

$$\|A_i - A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|(A_i - A)x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|A_i x - Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|x_i - y(x)\|}{\|x\|} \underset{\text{סדרת קושי } x_i}{<} \frac{\varepsilon \cdot \|x\|}{\|x\|} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$ $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ ולכן A_i סדרת קושי.

$\Leftarrow$ L <u>מרחב מטרי שלם</u> $\square$