מד"ר 1 / תרגיל בית 6#

אריאל סטולרמן

(1)

יהי $(V,\|\cdot\|)$ מרחב נורמה ממימד סופי. להלן הוכחה כי המרחב $L(V)$ של האופרטורים הליניאריים ב- V הוא מרחב נורמה, כאשר $\|A\| \coloneqq sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$:

נסתכל על $(L(V),\|\cdot\|)$. תהי A_i סדרת קושי כך ש: $\forall\varepsilon\exists N_\varepsilon\forall n,m>N_\varepsilon: \rho(A_n,A_m)=\|A_n-A_m\|<\varepsilon$. נוכיח כי הגבול $lim_{k\to\infty}A_k\in L(V)$ קיים ו הינו אופרטור לינארי. יהי $x\in\mathbb{R}^n$, עבורו נגדיר סדרה ב- $\mathbb{R}^n$: $x_i=A_ix$. יהי $\varepsilon>0$, ועבורו N_ε מקיים שלכל $n,m>N_\varepsilon$ מתקיים $\|A_n-A_m\|<\frac{\varepsilon}{\|x\|}$. להלן הוכחה כי x_i הינה סדרת קושי:

$$\|x_n-x_m\|=\|A_nx-A_mx\|=\|(A_n-A_m)x\|\leq$$

מהגדרת נורמת אופרטור מתקיים: $\|A\|\geq sup_{x\neq0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ ולכן $\|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|$ (סימון הנורמה עבור וקטור ועבור אופרטור לינארי הינו א ותו סימון, אך הסמנטיקה שונה כמובן).

$$\leq\|A_n-A_m\|\cdot\|x\|<\frac{\varepsilon}{\|x\|}\cdot\|x\|=\varepsilon$$

מכאן שלכל x כך ש- $\|x\|\neq 0$ ולכל ε תנאי קושי מתקיים ולכן x_i אכן סדרת קושי. כיוון ש- $\mathbb{R}^n$ מרחב שלם ו- x_i סדרת קושי, נקבל כי $\varphi(x)\coloneqq lim_{k\to\infty}x_i$ מקיימת: $\varphi(x)\in L(V)$ גם כן, כנדרש. הוכחה כי $\varphi(x)$ הוא פונקציה לינארית של x:

1. נניח כי $x=x'+x''$, $x_i'=A_ix'$, $x_i''=A_ix''$ עבורן מתקיים $\varphi(x')=lim_{k\to\infty}x_k'$, $\varphi(x'')=lim_{k\to\infty}x_k''$:

$$\varphi(x)=\varphi(x'+x'')=\lim_{k\to\infty}(x_k'+x_k'')=\lim_{k\to\infty}x_k'+\lim_{k\to\infty}x_k''=\varphi(x')+\varphi(x'')$$

2. נניח כי $x_i=A_ix$ עבורו מתקיים $\varphi(x)=lim_{k\to\infty}x_k$ ו-λ סקאלר:

$$\varphi(\lambda x)=\lim_{k\to\infty}(\lambda x)_i=\lambda\cdot\lim_{k\to\infty}x_i=\lambda\cdot\varphi(x)$$

מכאן ש- φ הינה אכן פונ' לינארית ב-x. מכאן התקבל אופרטור לינארי A המקיים: $Ax=\varphi(x)$, כלומר $Ax=lim_{k\to\infty}A_kx$. שוויון זה הינו שוויון וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. נותר להוכיח רק כי: $A=lim_{k\to\infty}A_i$ ב-$L(V)$. יהי $\varepsilon>0$ כלשהו ו-N_ε המתאים לסדרה A_ix כך שלכל $i>N_\varepsilon$ מתקיים: $\|A_ix-Ax\|<\varepsilon\cdot\|x\|$ (לכל $x\in\mathbb{R}^n$ כך ש-$\|x\|\neq 0$). כעת מתקיים:

$$\|A_i-A\|=\sup_{\|x\|\neq0}\frac{\|(A_i-A)x\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|\neq0}\frac{\|(A_ix-Ax\|}{\|x\|}<\frac{\varepsilon\cdot\|x\|}{\|x\|}=\varepsilon$$

ומכאן: $A=lim_{k\to\infty}A_i$, ולכן $A\in L(V)$ (קיים והינו אופרטור לינארי). לפיכך $(L(V),\|\cdot\|)$ הוא מרחב שלם, כנדרש.

(2)

תהיינה $A,P\in Mat_n(\mathbb{R})$ כך ש-$det(P)\neq 0$. להלן הוכחה כי $e^{P^{-1}AP}=P^{-1}e^AP$:

$$e^{P^{-1}AP}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(P^{-1}AP)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P^{-1}AP\cdot P^{-1}AP\cdot\ldots\cdot P^{-1}AP}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P^{-1}A^kP}{k!}=P^{-1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\cdot P=P^{-1}\cdot e^A\cdot P$$

(3)

תהי $A\in Mat_n(\mathbb{R})$:

$$det(e^A)=det\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=???$$

(4)

תהי $A\in Mat_n(\mathbb{R})$ כך ש-$A^t=-A$. להלן הוכחה כי e^A אורתוגונלית, כלומר ש-$e^A\cdot(e^A)^t=(e^A)^t\cdot e^A=E$, כאשר E מטריצת יחידה:

$$(e^A)^t=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot(A^k)^t\underset{(A^k)^t=(A\cdot A\cdot\ldots\cdot A)^t=A^t\cdot A^t\cdot\ldots\cdot A^t=(A^t)^k}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot(A^t)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot(-A)^k=e^{-A}\Rightarrow$$

$$e^A\cdot(e^A)^t=e^A\cdot e^{-A}=e^{A-A}=e^{\theta}=\begin{pmatrix}e^0&0&\cdots&0\\0&e^0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&e^0\end{pmatrix}=E$$

(5) (לא בטוח שזה נכון)

תהי $A\in Mat_n(\mathbb{R})$ כך ש-$\lambda_1,\dots,\lambda_n$ הם ערכיה העצמיים. להלן חישוב ערכיה העצמיים של e^A:

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\dots&0\\0&\lambda_2&\dots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\dots&\lambda_n\end{pmatrix},\exists P\ s.t.:\ A=P^{-1}DP\Rightarrow e^A=e^{P^{-1}DP}\underset{\text{לפי 2}}{=}P^{-1}e^DP=$$

$$e^D=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D^k}{k!}=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_1^k}{k!}&0&\cdots&0\\0&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_2^k}{k!}&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&e^{\lambda_2}&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&e^{\lambda_n}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

כיוון ש-e^D היא הצורה האלכסונית של e^A, אז יש להן אותם ערכים עצמיים. כיוון שערכיה העצמיים של e^D הם $e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}$ אז אלו גם ערכיה העצמיים של e^A.

(6)

$a.\ y_1(x)=1,y_2(x)=x^2$	$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}1&x^2\\0&2x\end{vmatrix}=2x$
$b.\ y_1(x)=e^{-x},y_2(x)=xe^{-x}$	$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}e^{-x}&xe^{-x}\\-e^{-x}&e^{-x}-xe^{-x}\end{vmatrix}=e^{-2x}-xe^{-2x}+xe^{-2x}=e^{-2x}$
$c.\ y_1(x)=\cos(x),$ $y_2(x)=\cos(2x)$	$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}cosx&cos2x\\-sinx&-2sin2x\end{vmatrix}=-2cosx\cdot sin2x+sinx\cdot cos2x=$ $-4sinx\cdot cos^2x+cos^2x\cdot sinx-sin^3x=-3sinx\cdot cos^2x-sin^3x$
$d.\ y_1(x)=sinx,$ $y_2(x)=sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}sinx&sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\\cosx&cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{vmatrix}=sinx\cdot cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot cosx=$ $\frac{1}{2}\left[sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)-sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+sin\frac{\pi}{4}\right]=2sin\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$
$e.\ y_1(x)=sin^2x,$ $y_2(x)=cos2x$	$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}sin^2x&cos2x\\2sinx\cdot cosx&-2sin2x\end{vmatrix}=-4sin^3x\cdot cosx-(2sinx\cdot cos^3x-2sin^3x\cdot cosx)=$ $-2sin^3x\cdot cosx-2sinx\cdot cos^3x=-sin2x\cdot\underbrace{(sin^2x+cos^2x)}_{=1}=-sin2x$

(7)

$a.\ y''-2y'=0:$

$p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=2\Rightarrow Solutions:\{e^{0\cdot x},e^{2x}\}\Rightarrow y(x)=c_1+c_2e^{2x}$

$b.\ y''-6y'+9y=0:$

$$p(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+9=0\Rightarrow\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=3\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=3\Rightarrow y(x)=c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}$$

$c.\ y''+2y'+10y=0:$

$$p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+10=0\Rightarrow\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{-2\pm6i}{2}\Rightarrow\lambda_1=-1+3i,\lambda_2=-1-3i\Rightarrow y(x)=c_1e^{-x}sin3x+c_2e^{-x}cos3x$$

$d.\ y''+4y=0:$

$p(\lambda)=\lambda^2+4=0 \Rightarrow \pm\frac{\sqrt{-16}}{2}=\pm 2i \Rightarrow y(x)=c_1 sin2x+c_2 cos2x$

(8)

א. $y''-4y=8x^3$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$y''-4y=0 \Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2-4=0 \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=-2 \Rightarrow y_1(x)=e^{2x}, y_2(x)=e^{-2x}$

מתקיים: $g(x)=8x^3=e^{\alpha x}P_n(x)$ כלומר $\alpha=0\ (\neq \lambda_1,\lambda_2), P_n(x)=8x^3$. מכאן שהפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}Q_n(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. נחשב $\tilde{y}', \tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$\tilde{y}'=3Ax^2+2Bx+C, \qquad \tilde{y}''=6Ax+2B \Rightarrow$

$6Ax+2B-4(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=8x^3 \Leftrightarrow 6Ax+2B-4Ax^3-4Bx^2-4Cx-4D=8x^3 \Leftrightarrow$

$-4Ax^3-4Bx^2+(6A-4C)x+(2B-4D)=8x^3 \Rightarrow$

- $-4A=8 \Rightarrow A=-2$
- $-4B=0 \Rightarrow B=0$
- $6A-4C=0 \Rightarrow -12=4C \Rightarrow C=-3$
- $2B-4D=0 \Rightarrow D=0$

$\Rightarrow \tilde{y}(x)=-2x^3-3x \Rightarrow$

General Solution: $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-2x^3-3x$

ב. $y''-5y'+4y=e^{2x}\cdot 4x^2$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$y''-5y'+4y=0 \Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+4=0 \Rightarrow \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=4 \Rightarrow y_1(x)=e^x, y_2(x)=e^{4x}$

מתקיים: $g(x)=e^{2x}\cdot 4x^2$ כלומר $\alpha=2(\neq \lambda_1,\lambda_2), P_n(x)=4x^2$. מכאן שפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}Q_n(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$. נחשב את $\tilde{y}', \tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$\tilde{y}'(x)=2e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+e^{2x}(2Ax+B)=e^{2x}[2Ax^2+2Bx+2C+2Ax+B]=e^{2x}[2Ax^2+(2A+2B)x+(B+2C)]$

$\tilde{y}''(x)=4e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+2e^{2x}(2Ax+B)+2e^{2x}(2Ax+B)+e^{2x}\cdot 2A=$

$e^{2x}(4Ax^2+4Bx+4C+4Ax+2B+4Ax+2B+2A)=e^{2x}[4Ax^2+(8A+4B)x+(2A+4B+4C)] \Rightarrow$

$e^{2x}[4Ax^2+(8A+4B)x+(2A+4B+4C)]-5e^{2x}[2Ax^2+(2A+2B)x+(B+2C)]+4e^{2x}(Ax^2+Bx+C)=e^{2x}\cdot 4x^2 \Rightarrow$

$4Ax^2+(8A+4B)x+(2A+4B+4C)-10Ax^2-(10A+10B)x-(5B+10C)+4Ax^2+4Bx+4C=4x^2 \Rightarrow$

$-2Ax^2+(-2A-2B)x+(2A-B-2C)=4x^2 \Rightarrow$

- $-2A=4 \Rightarrow A=-2$
- $-2A-2B=0 \Rightarrow B=-A \Rightarrow B=2$
- $2A-B-2C=0 \Rightarrow -4-2-2C=0 \Rightarrow C=-3$

$\Rightarrow \tilde{y}(x)=e^{2x}(-2x^2+2x-3) \Rightarrow$

General Solution: $y(x)=c_1e^x+c_2e^{4x}+e^{2x}(-2x^2+2x-3)$

ג. $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$y''+3y'-4y=0 \Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2+3\lambda-4=0 \Rightarrow \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-4 \Rightarrow y_1(x)=e^x, y_2(x)=e^{-4x}$

מתקיים:

- $y''+3y'-4y=e^{-4x}$: $\alpha=-4=\lambda_2, P_n(x)=1$, מכאן שהפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x)=Axe^{-4x}$. נחשב את $\tilde{y}', \tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$\tilde{y}'(x)=-4Axe^{-4x}+Ae^{-4x}=e^{-4x}(-4Ax+A), \qquad \tilde{y}''(x)=-4e^{-4x}(A-4Ax)-4Ae^{-4x}=e^{-4x}(16Ax-8A) \Rightarrow$

$e^{-4x}(16Ax-8A)+3e^{-4x}(-4Ax+A)-4Axe^{-4x}=e^{-4x} \Rightarrow 16Ax-8A-12Ax+3A-4Ax=1 \Rightarrow$

$-5A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{5}\Rightarrow \tilde{y}(x)=-\frac{1}{5}xe^{-4x}$

- $y''+3y'-4y=xe^{-x}$: $\alpha=-1(\neq\lambda_1,\lambda_2), P_n(x)=x$, מכאן שהפתרון מהצורה : $\tilde{y}(x)=e^{-x}(Ax+B)$. נחשב את $\tilde{y}',\tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$\tilde{y}'(x)=-e^{-x}(Ax+B)+Ae^{-x}=e^{-x}[-Ax+(A-B)],\qquad \tilde{y}''(x)=-e^{-x}[-Ax+(A-B)]-Ae^{-x}=e^{-x}[Ax+(-2A+B)]\Rightarrow$

$e^{-x}[Ax+(-2A+B)]+3e^{-x}[-Ax+(A-B)]-4e^{-x}(Ax+B)=xe^{-x}\Rightarrow Ax-2A+B-3Ax+3A-3B-4Ax-4B=x\Rightarrow$

$-6Ax+A-6B=x\Rightarrow$

- $-6A=1\Rightarrow A=-\frac{1}{6}$
- $A-6B=0\Rightarrow 6B=-\frac{1}{6}\Rightarrow B=-\frac{1}{36}$

$\Rightarrow \tilde{y}(x)=e^{-x}\left(-\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}\right)$

$\Rightarrow General\ Solution\colon\ y(x)=c_1e^{x}+c_2e^{-4x}-\frac{1}{5}xe^{-4x}+e^{-x}\left(-\frac{1}{6}x-\frac{1}{36}\right)$

ד. $y''-2y'+y=e^{x}\cdot 6x$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$y''-2y'+y=0\Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}\Rightarrow \lambda=1\ (r=2)\Rightarrow y_1(x)=e^{x}, y_2(x)=xe^{x}$

מתקיים: $g(x)=e^{x}\cdot 6x$ כלומר $\alpha=1=\lambda_1=\lambda_2, P_n(x)=6x$ ומכאן שהפתרון מ הצורה: $\tilde{y}(x)=x^2e^{x}(Ax+B)$. נחשב את $\tilde{y}',\tilde{y}''$ ונציב במשוואה (כאשר $\tilde{y}(x)=e^{x}(Ax^3+Bx^2)$):

$\tilde{y}'(x)=e^{x}(Ax^3+Bx^2)+e^{x}(3Ax^2+2Bx)=e^{x}[Ax^3+(3A+B)x^2+2Bx],$

$\tilde{y}''(x)=e^{x}[Ax^3+(3A+B)x^2+2Bx]+e^{x}[3Ax^2+(6A+2B)x+2B]=e^{x}[Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B)x+2B]\Rightarrow$

$e^{x}[Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B)x+2B]-2e^{x}[Ax^3+(3A+B)x^2+2Bx]+e^{x}(Ax^3+Bx^2)=e^{x}\cdot 6x\Rightarrow$

$Ax^3+(6A+B)x^2+(6A+4B)x+2B-2Ax^3+(-6A-2B)x^2-4Bx+Ax^3+Bx^2=6x\Rightarrow$

$6Ax+2B=6x\Rightarrow$

- $6A=6\Rightarrow A=1$
- $2B=0\Rightarrow B=0$

$\Rightarrow \tilde{y}(x)=x^3e^{x}$

$\Rightarrow General\ Solution\colon\ y(x)=e^{x}(c_1+c_2x+x^3)$

ה. $y''+y=3\sin 2x+x\cos 2x$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$y''+y=0\Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2+1=0\Rightarrow \lambda_1=i,\lambda_2=-i\Rightarrow y_1(x)=e^{ix}, y_2(x)=e^{-ix}\Rightarrow y_1(x)=\cos x, y_2(x)=\sin x$

מתקיים: $g(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]=3\sin 2x+x\cos 2x$ כלומר $\alpha=0(\neq\lambda_1,\lambda_2), P_n(x)=x, Q_m(x)=3, \beta=2$ ולכן

הפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x)=R_l(x)\cos 2x+S_l(x)\sin 2x\underset{l=\max\{n,m\}}{=}(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$. נחשב את $\tilde{y}',\tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$\tilde{y}'(x)=-2(Ax+B)\sin 2x+A\cos 2x+2(Cx+D)\cos 2x+C\sin 2x=(2Cx+A+2D)\cos 2x+(-2Ax-2B+C)\sin 2x$

$\tilde{y}''(x)=-2(2Cx+A+2D)\sin 2x+2C\cos 2x+2(-2Ax-2B+C)\cos 2x-2A\sin 2x=$

$(2C-4Ax-4B+2C)\cos 2x+(-4Cx-2A-4D-2A)\sin 2x=(-4Ax-4B+4C)\cos 2x+(-4Cx-4A-4D)\sin 2x\Rightarrow$

$(-4Ax-4B+4C)\cos 2x+(-4Cx-4A-4D)\sin 2x+(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x=3\sin 2x+x\cos 2x\Rightarrow$

$[(-3A)x+(-3B+4C)]\cos 2x+[(-3C)x+(-4A-3D)]\sin 2x=x\cos 2x+3\sin 2x\Rightarrow$

- $-3\mathrm{A}=1\Rightarrow \mathrm{A}=-\frac{1}{3}$
- $-3B+4C=0\Rightarrow C=\frac{3}{4}B$

- $-3C=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow B=0$
- $-4A-3D=3 \Rightarrow \frac{4}{3}-3D=3 \Rightarrow D=-\frac{5}{9}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x)=-\frac{1}{3}x\cos 2x-\frac{5}{9}\sin 2x \Rightarrow General\ solution:\ y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x-\frac{5}{9}\sin 2x$$

ו. $y''+2y'+y=e^x\cos x$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y''+2y'+y=0 \Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1=0 \Rightarrow \frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1 \Rightarrow \lambda=-1\ (r=2) \Rightarrow y_1(x)=e^{-x}, y_2(x)=xe^{-x}$$

מתקיים: $g(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]=e^x\cos x$ כלומר $\alpha=1(\neq\lambda),\beta=1,P_n(x)=1,Q_m(x)=0$ ולכן הפתרון הוא

מהצורה: $\tilde{y}(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)$. נחשב את $\tilde{y}',\tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}'(x)=e^x(A\cos x+B\sin x)+e^x(-A\sin x+B\cos x)=e^x[(A+B)\cos x+(-A+B)\sin x]$$

$$\tilde{y}''(x)=e^x[(A+B)\cos x+(-A+B)\sin x]+e^x[-(A+B)\sin x+(-A+B)\cos x]=e^x[2B\cos x-2A\sin x] \Rightarrow$$

$$e^x[2B\cos x-2A\sin x]+2e^x[(A+B)\cos x+(-A+B)\sin x]+e^x(A\cos x+B\sin x)=e^x\cos x \Rightarrow$$

$$(2B+2A+2B+A)\cos x+(-2A-2A+2B+B)\sin x=\cos x \Rightarrow (3A+4B)\cos x+(-4A+3B)\sin x=\cos x \Rightarrow$$

- $-4A+3B=0 \Rightarrow A=\frac{3}{4}B$
- $3A+4B=\frac{9}{4}B+4B=1 \Rightarrow B=\frac{4}{25} \Rightarrow A=\frac{3}{25}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x)=e^x\left(\frac{3}{25}\cos x+\frac{4}{25}\sin x\right) \Rightarrow General\ solution:\ y(x)=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}+e^x\left(\frac{3}{25}\cos x+\frac{4}{25}\sin x\right)$$

ז. $y''+y'+y=\sin^2 x$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y''+y'+y=0 \Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2+\lambda+1=0 \Rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow y_{1,2}(x)=e^{\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}x} \Rightarrow$$

$$y_1(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ y_2(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

מתקיים: $g(x)=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, נסתכל על $g(x)=\frac{1}{2}$ ו-$g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$:

- $y''+y'+y=\frac{1}{2}$: מתקיים $g(x)=e^{\alpha x}P(x)$ ולכן $\alpha=0(\neq\lambda_1,\lambda_2),P_n(x)=\frac{1}{2}$ ומכאן הפתרון מהצורה $\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}Q_n(x)=A$, ולכן $\tilde{y}'(x)=\tilde{y}''(x)=0$. מכאן: $0+0+A=\frac{1}{2}$ ולכן $A=\frac{1}{2}$. הפתרון: $\tilde{y}(x)=\frac{1}{2}$.
- $y''+y'+y=-\frac{1}{2}\cos 2x$: מתקיים $g(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$ ולכן $\alpha=0(\neq\lambda_1,\lambda_2),\beta=2,P_n(x)=-\frac{1}{2}$, $Q_m(x)=0$, ומכאן הפתרון מהצורה $\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}[A\cos 2x+B\sin 2x]=A\cos 2x+B\sin 2x$. נחשב את $\tilde{y}',\tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}'(x)=-2A\sin 2x+2B\cos 2x,\qquad \tilde{y}''(x)=-4A\cos 2x-4B\sin 2x \Rightarrow$$

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x+A\cos 2x+B\sin 2x=-\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow$$

$$(-3A+2B)\cos 2x+(-3B-2A)\sin 2x==-\frac{1}{2}\cos 2x \Rightarrow$$

- $-3B-2A=0 \Rightarrow B=-\frac{2}{3}A$
- $-3A+2B=-\frac{1}{2} \Rightarrow -3A-\frac{4}{3}A=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{13}{3}A=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{3}{26} \Rightarrow B=-\frac{2}{26}=-\frac{1}{13}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x)=\frac{3}{26}\cos 2x-\frac{1}{13}\sin 2x$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x)=c_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}+\frac{3}{26}\cos 2x-\frac{1}{13}\sin 2x$.

(9)

א. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$$

מתקיים: $g(x) = e^x \cdot 4$ ומכאן $\alpha = 1 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = 4$ ולכן הפתרון הוא מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = Ae^x$. נחשב את $\tilde{y}', \tilde{y}''$ ונציב במשוואה: $\tilde{y}'(x) = \tilde{y}''(x) = \tilde{y}(x) = Ae^x$ ומכאן:

$$Ae^x + Ae^x = 4e^x \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow \tilde{y}(x) = 2e^x$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2e^x$. נציב את תנאי ההתחלה למציאת הפתרון הפרטי:

- $c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + 2e^0 = c_1 + 2 = 4 \Rightarrow c_1 = 2$
- $y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 + 2e^0 = c_2 + 2 = -3 \Rightarrow c_2 = -5$

$$\Rightarrow y(x) = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$$

ב. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' - 2y' = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{2x}$$

מתקיים: $g(x) = e^x \cdot 2$ ומכאן $\alpha = 1 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = 2$ ולכן הפתרון הוא מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = Ae^x$. נחשב את $\tilde{y}', \tilde{y}''$ ונציב במשוואה: $\tilde{y}'(x) = \tilde{y}''(x) = \tilde{y}(x) = Ae^x$ ומכאן:

$$Ae^x - 2Ae^x = 2e^x \Rightarrow -A = 2 \Rightarrow A = -2 \Rightarrow \tilde{y}(x) = -2e^x$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - 2e^x$. נציב את תנאי ההתחלה למציאת הפתרון הפרטי:

- $y'(1) = 2c_2 e^2 - 2e = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{e}$
- $y(1) = c_1 + \frac{1}{e} e^2 - 2e = -1 \Rightarrow c_1 - e = -1 \Rightarrow c_1 = e - 1$

$$\Rightarrow y(x) = e - 1 + e^{2x-1} - 2e^x$$

ג. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, y(0) = y'(0) = 0$:

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y_1(x) = e^{-x}\cos x, y_2(x) = e^{-x}\sin x$$

מתקיים: $g(x) = e^{-x} \cdot x$ ומכאן $\alpha = -1 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = x$ ולכן הפתרון הוא מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = e^{-x}(Ax + B)$. נחשב את $\tilde{y}', \tilde{y}''$ ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}'(x) = -e^{-x}(Ax + B) + Ae^{-x} = e^{-x}(-Ax + A - B), \qquad \tilde{y}''(x) = -e^{-x}(-Ax + A - B) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax - 2A + B) \Rightarrow$$

$$e^{-x}(Ax - 2A + B) + 2e^{-x}(-Ax + A - B) + 2e^{-x}(Ax + B) = xe^{-x} \Rightarrow$$

$$(A - 2A + 2A)x - 2A + B + 2A - 2B + 2B = x \Rightarrow Ax + B = x \Rightarrow A = 1, B = 0 \Rightarrow \tilde{y}(x) = xe^{-x}$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = e^{-x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x + x]$. נציב את תנאי ההתחלה למציאת הפתרון הפרטי:

- $y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
- $y'(x) = -e^{-x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x + x] + e^{-x}[-c_1 \sin x + c_2 \cos x + 1] = e^{-x}[(-c_1 + c_2)\cos x - (c_1 + c_2)\sin x - x + 1]$
  $\Rightarrow y'(0) = -c_1 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x}[x - \sin x]$$

(10)

א. $\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0$:

הפולינום האופייני: $p(\lambda)=\lambda^2+p\lambda+q=\lambda^2+5\lambda+4$ מקיים $p,q>0$. לפי קריטריון R-H המשוואה יציבה, וכיוון שהמשוואה במקדמים קבועים, היא יציבה אסימפטוטית.

ב. $y'''+6y''+12y'+8y=0$:

הפולינום האופייני: $p(\lambda)=\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8=0$. מתקיים: $a_1,a_2,a_3>0$ וגם $a_3=8<6\cdot 12=a_1\cdot a_2$.

לפי קריטריון R-H המשוואה יציבה, ולכן יציבה אסימפטוטית.

ג. $y'''+6y''+11y'+6y=0$:

הפולינום האופייני: $p(\lambda)=\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0$. מתקיים: $a_1,a_2,a_3>0$ וגם $a_3=6<6\cdot 11=a_1\cdot a_2$. לפי קריטריון R-H המשוואה יציבה, ולכן יציבה אסימפטוטית.

ד. $y^{(4)}+4y'''+4y''=0$:

הפולינום האופייני: $p(\lambda)=\lambda^4+4\lambda^3+4\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2+4\lambda+4)=\lambda^2(\lambda+2)^2$ ומכאן: $\lambda_1=0\ (r_1=2),\lambda_2=-2\ (r_2=2)$. מכאן שפתרון המד"ר הוא: $y(x)=c_1+c_2x+c_3e^{-2x}+c_4xe^{-2x}$. מתקיים: $y(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}c_1+\infty+0+0=\infty$ ולכן המשוואה לא יציבה, ובפרט לא יציבה אסימפטוטית.

(11)

נתון: $\ddot{x}+k\dot{x}+\sin x=0$ עבור $k>0$. נסמן $y=\dot{x}$ ונקבל: $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-ky-\sin x\end{cases}$ ומכאן נקבל את השדה הוקטורי $V=(y,-ky-\sin x)$.

א. לינאריזציה:

$$\dot{\xi}=\begin{pmatrix}\frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y}\end{pmatrix}\cdot\xi=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos x & -k\end{pmatrix}\cdot\xi:$$

- $x_0=(0,0)$: $\dot{\xi}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos x & -k\end{pmatrix}|_{(0,0)}\cdot\xi=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -k\end{pmatrix}\xi$
- $x_0=(\pi,0)$: $\dot{\xi}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos x & -k\end{pmatrix}|_{(\pi,0)}\cdot\xi=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -k\end{pmatrix}\xi$

ב. יציבות:

$$x_0=(0,0):\quad \left|\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -k\end{pmatrix}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & -k-\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+k)+1=\lambda^2+k\lambda+1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$$

ידוע כי $k>0$, ולכן ישנם שני מקרים: אם $0<k<2$, נקבל כי $Im(\lambda_{1,2})\neq 0$ ויתקיים $Re(\lambda_{1,2})=-\frac{k}{2}<0$ - והמשוואה יציבה אסימפטוטית. אם $k\geq 2$, נקבל שורשים ממשיים, וכיוון שבכל מקרה $k>\sqrt{k^2-4}$ אז $\lambda_{1,2}<0$ וגם במקרה זה המשוואה יציבה אסימפטוטית.

$$x_0=(\pi,0):\quad \left|\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -k\end{pmatrix}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -k-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+k\lambda-1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}\Rightarrow$$

השורשים ממשיים ואחד מהם חיובי, ולכן המשוואה אינה יציבה (אסימפטוטית).

(12)

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x+y+x^3\\ \dot{y}=-x-2y+3x^5\end{cases}:$$

א. נקודות קריטיות:

$$V=(-2x+y+x^3,-x-2y+3x^5)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}-2x+y+x^3=0\\ -x-2y+3x^5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=2x-x^3\\ y=\frac{3}{2}x^5-\frac{1}{2}x\end{cases}\Rightarrow 2x-x^3=\frac{3}{2}x^5-\frac{1}{2}x\Rightarrow$$

$4x-2x^3=3x^5-x \Rightarrow 3x^5+2x^3-5x=0 \Rightarrow x(3x^4+2x^2-5)=0 \Rightarrow$

$$\left[t := x^2 \Rightarrow 3t^2+2t-5=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{6}=\frac{-2\pm 8}{6} \Rightarrow t_1=-\frac{10}{6}\ (irrelevant), t_2=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1\right]$$

$\Rightarrow x_1=0, x_2=1, x_3=-1 \Rightarrow$

הנקודות הקריטיות הן : $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

ב. לינאריזציה :

$$\dot{\xi}=\begin{pmatrix}\frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y}\\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y}\end{pmatrix}\xi=\begin{pmatrix}3x^2-2 & 1\\ 15x^4-1 & -2\end{pmatrix}\xi \Rightarrow$$

- $(0,0)$: $\dot{\xi}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\xi$
- $(1,1)$: $\dot{\xi}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 14 & -2\end{pmatrix}\xi$
- $(-1,-1)$: $\dot{\xi}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 14 & -2\end{pmatrix}\xi$

ג. יציבות :

- $\left|\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ -1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2+1=\lambda^2+4\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm i \Rightarrow Re(\lambda)<0$

מכאן שהמשוואה יציבה אסימפטוטית.

- $\left|\begin{pmatrix}1 & 1\\ 14 & -2\end{pmatrix}-\lambda I\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 14 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+2)-14=\lambda^2-\lambda+2\lambda-2-14=\lambda^2-\lambda-16=0 \Rightarrow$
  $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{65}}{2} \Rightarrow \lambda_1=\frac{1+\sqrt{65}}{2}>0 \Rightarrow Re(\lambda_1)>0$

מכאן שהמשוואה אינה יציבה (ובפרט אינה יציבה אסימפטוטית).