

מד"ר 1 / תרגיל בית #6

אריאל סטורמן

(1)

יהי $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמה ממימד סופי. להלן הוכחה כי המרחב $L(V)$ של האופרטורים הליניאריים ב- V הוא מרחב נורמה, כאשר $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

נסתכל על $(L(V), \|\cdot\|)$. תהי A_i סדרת קושי כך ש: $\forall \varepsilon \exists N_\varepsilon \forall n, m > N_\varepsilon: \rho(A_n, A_m) = \|A_n - A_m\| < \varepsilon$. נוכיח כי הגבול $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \in L(V)$ קיים והינו אופרטור ליניארי. יהי $x \in \mathbb{R}^n$, עבורו נגדיר סדרה ב- $\mathbb{R}^n: x_i = A_i x$. יהי $\varepsilon > 0$, עבורו N_ε מקיים שלכל $n, m > N_\varepsilon$ מתקיים $\|A_n - A_m\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$. להלן הוכחה כי הינה סדרת קושי:

$$\|x_n - x_m\| = \|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\| \leq$$

מהגדרת נורמת אופרטור מתקיים: $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ ולכן $\|A\| \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ (סימון הנורמה עבור וקטור ועבור אופרטור ליניארי הינו אותו סימון, אך הסמנטיקה שונה כמובן).

$$\leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \cdot \|x\| = \varepsilon$$

מכאן שלכל x כך ש- $\|x\| \neq 0$ ולכל ε תנאי קושי מתקיים ולכן x_i אכן סדרת קושי. כיוון ש- \mathbb{R}^n מרחב שלם ו- x_i סדרת קושי, נקבל כי $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i := \varphi(x)$ מקיימת: $\varphi(x) \in L(V)$ גם כן, כנדרש. הוכחה כי $\varphi(x)$ הוא פונקציה ליניארית של x :

$$1. \text{ נניח כי } x = x' + x'', x = A_i x', x_i'' = A_i x'', x_i' = A_i x', \varphi(x'') = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k'', \varphi(x') = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k', \varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$$

$$\varphi(x) = \varphi(x' + x'') = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k' + x_k'') = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k' + \lim_{k \rightarrow \infty} x_k'' = \varphi(x') + \varphi(x'')$$

$$2. \text{ נניח כי } x_i = A_i x \text{ עבורו מתקיים } \varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ ו-} \lambda \varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda x_k$$

$$\varphi(\lambda x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda x)_i = \lambda \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} x_i = \lambda \cdot \varphi(x)$$

מכאן ש- φ הינה אכן פונ' ליניארית ב- x . מכאן התקבל אופרטור ליניארי A המקיים: $Ax = \varphi(x)$, כלומר $Ax = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k x$. שוויון זה הינו שוויון וקטוריים ב- \mathbb{R}^n . נותר להוכיח רק כי: $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_i$ ב- $L(V)$. יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו ו- N_ε המתאים לסדרה $A_i x$ כך שלכל $i > N_\varepsilon$ מתקיים: $\|A_i x - Ax\| < \varepsilon \cdot \|x\|$ (לכל $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $\|x\| \neq 0$). כעת מתקיים:

$$\|A_i - A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|(A_i - A)x\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|A_i x - Ax\|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon \cdot \|x\|}{\|x\|} = \varepsilon$$

ומכאן: $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_i$ ולכן $A \in L(V)$ (קיים והינו אופרטור ליניארי). לפיכך $(L(V), \|\cdot\|)$ הוא מרחב שלם, כנדרש.

(2)

תהייה $A, P \in Mat_n(\mathbb{R})$ כך ש- $\det(P) \neq 0$. להלן הוכחה כי $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$.

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP \cdot \dots \cdot P^{-1}AP}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}A^k P}{k!} = P^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot P = P^{-1} \cdot e^A \cdot P$$

(3)

תהי $A \in Mat_n(\mathbb{R})$:

$$\det(e^A) = \det \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = ???$$

(4)

תהי $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ כך ש- $A^t = -A$. להלן הוכחה כי e^A אורתוגונלית, כלומר ש- $E = e^A \cdot (e^A)^t = (e^A)^t \cdot e^A = E$ כאשר E מטריצת יחידה:

$$(e^A)^t = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (A^k)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (A^t)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot (-A)^k = e^{-A} \Rightarrow$$

$$e^A \cdot (e^A)^t = e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = \begin{pmatrix} e^0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^0 \end{pmatrix} = E$$

(5) (לא בטוח שזה נכון)

תהי $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ כך ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הם ערכיה העצמיים. להלן חישוב ערכיה העצמיים של e^A :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \exists P \text{ s.t.}: A = P^{-1}DP \Rightarrow e^A = e^{P^{-1}DP} \stackrel{\text{לפי 2}}{=} P^{-1}e^D P =$$

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k}{k!} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

כיוון ש- e^D היא הצורה האלכסונית של e^A , אז יש להן אותם ערכים עצמיים. כיוון שערכיה העצמיים של e^D הם $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ אז אלו גם ערכיה העצמיים של e^A .

(6)

a. $y_1(x) = 1, y_2(x) = x^2$	$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 2x$
b. $y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x}$	$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{vmatrix} = e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$
c. $y_1(x) = \cos(x),$ $y_2(x) = \cos(2x)$	$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \cos 2x \\ -\sin x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -2\cos x \cdot \sin 2x + \sin x \cdot \cos 2x =$ $-4\sin x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x = -3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$
d. $y_1(x) = \sin x,$ $y_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{vmatrix} = \sin x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x =$ $\frac{1}{2} \left[\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\frac{\pi}{4} \right] = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
e. $y_1(x) = \sin^2 x,$ $y_2(x) = \cos 2x$	$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos 2x \\ 2\sin x \cdot \cos x & -2\sin 2x \end{vmatrix} = -4\sin^3 x \cdot \cos x - (2\sin x \cdot \cos^3 x - 2\sin^3 x \cdot \cos x) =$ $-2\sin^3 x \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos^3 x = -\sin 2x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) = -\sin 2x$

(7)

a. $y'' - 2y' = 0:$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \Rightarrow \text{Solutions: } \{e^{0 \cdot x}, e^{2x}\} \Rightarrow y(x) = c_1 + c_2 e^{2x}$$

b. $y'' - 6y' + 9y = 0:$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

c. $y'' + 2y' + 10y = 0:$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} \sin 3x + c_2 e^{-x} \cos 3x$$

d. $y'' + 4y = 0:$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \pm \frac{\sqrt{-16}}{2} = \pm 2i \Rightarrow y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

(8)

$$א. y'' - 4y = 8x^3 :$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' - 4y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2 \Rightarrow y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = e^{-2x}$$

מתקיים: $g(x) = 8x^3 = e^{\alpha x} P_n(x)$ כלומר $P_n(x) = 8x^3$ ($\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$). מכאן שהפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ נחשב \tilde{y}', \tilde{y}'' ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \tilde{y}'' = 6Ax + 2B \Rightarrow$$

$$6Ax + 2B - 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 8x^3 \Leftrightarrow 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D = 8x^3 \Leftrightarrow$$

$$-4Ax^3 - 4Bx^2 + (6A - 4C)x + (2B - 4D) = 8x^3 \Rightarrow$$

- $-4A = 8 \Rightarrow A = -2$
- $-4B = 0 \Rightarrow B = 0$
- $6A - 4C = 0 \Rightarrow -12 = 4C \Rightarrow C = -3$
- $2B - 4D = 0 \Rightarrow D = 0$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = -2x^3 - 3x \Rightarrow$$

$$\text{General Solution: } y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x$$

$$ב. y'' - 5y' + 4y = e^{2x} \cdot 4x^2 :$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' - 5y' + 4y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4 \Rightarrow y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{4x}$$

מתקיים: $g(x) = e^{2x} \cdot 4x^2$ כלומר $P_n(x) = 4x^2$ ($\alpha = 2 \neq \lambda_1, \lambda_2$). מכאן שפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ נחשב את \tilde{y}, \tilde{y}' ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B) = e^{2x}[2Ax^2 + 2Bx + 2C + 2Ax + B] = e^{2x}[2Ax^2 + (2A + 2B)x + (B + 2C)]$$

$$\tilde{y}''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A =$$

$$e^{2x}(4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4Ax + 2B + 4Ax + 2B + 2A) = e^{2x}[4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B + 4C)] \Rightarrow$$

$$e^{2x}[4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B + 4C)] - 5e^{2x}[2Ax^2 + (2A + 2B)x + (B + 2C)] + 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) = e^{2x} \cdot 4x^2 \Rightarrow$$

$$4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B + 4C) - 10Ax^2 - (10A + 10B)x - (5B + 10C) + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 4x^2 \Rightarrow$$

$$-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (2A - B - 2C) = 4x^2 \Rightarrow$$

- $-2A = 4 \Rightarrow A = -2$
- $-2A - 2B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = 2$
- $2A - B - 2C = 0 \Rightarrow -4 - 2 - 2C = 0 \Rightarrow C = -3$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = e^{2x}(-2x^2 + 2x - 3) \Rightarrow$$

$$\text{General Solution: } y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + e^{2x}(-2x^2 + 2x - 3)$$

$$ג. y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} :$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4 \Rightarrow y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-4x}$$

מתקיים:

• $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x}$: נחשב את \tilde{y}, \tilde{y}' ונציב במשוואה: $\tilde{y}(x) = Ax e^{-4x}$, מכאן שהפתרון מהצורה: $\alpha = -4 = \lambda_2, P_n(x) = 1$

$$\tilde{y}'(x) = -4Ax e^{-4x} + Ae^{-4x} = e^{-4x}(-4Ax + A), \quad \tilde{y}''(x) = -4e^{-4x}(A - 4Ax) - 4Ae^{-4x} = e^{-4x}(16Ax - 8A) \Rightarrow$$

$$e^{-4x}(16Ax - 8A) + 3e^{-4x}(-4Ax + A) - 4Ax e^{-4x} = e^{-4x} \Rightarrow 16Ax - 8A - 12Ax + 3A - 4Ax = 1 \Rightarrow$$

$$-5A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{5} \Rightarrow \tilde{y}(x) = -\frac{1}{5}xe^{-4x}$$

נציב \tilde{y}', \tilde{y}'' בחשב את $\tilde{y}(x) = e^{-x}(Ax + B)$: מכאן שהפתרון מהצורה $\alpha = -1 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = x : y'' + 3y' - 4y = xe^{-x}$ •
במשוואה :

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(x) &= -e^{-x}(Ax + B) + Ae^{-x} = e^{-x}[-Ax + (A - B)], & \tilde{y}''(x) &= -e^{-x}[-Ax + (A - B)] - Ae^{-x} = e^{-x}[Ax + (-2A + B)] \Rightarrow \\ e^{-x}[Ax + (-2A + B)] + 3e^{-x}[-Ax + (A - B)] - 4e^{-x}(Ax + B) &= xe^{-x} \Rightarrow Ax - 2A + B - 3Ax + 3A - 3B - 4Ax - 4B = x \Rightarrow \\ -6Ax + A - 6B &= x \Rightarrow \end{aligned}$$

- $-6A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{6}$
- $A - 6B = 0 \Rightarrow 6B = -\frac{1}{6} \Rightarrow B = -\frac{1}{36}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = e^{-x} \left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} \right)$$

$$\Rightarrow \text{General Solution: } y(x) = c_1e^x + c_2e^{-4x} - \frac{1}{5}xe^{-4x} + e^{-x} \left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{36} \right)$$

$$\text{ד. } y'' - 2y' + y = e^x \cdot 6x$$

פתרון המשוואה ההומוגנית :

$$y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \Rightarrow \lambda = 1 (r = 2) \Rightarrow y_1(x) = e^x, y_2(x) = xe^x$$

מתקיים: $g(x) = e^x \cdot 6x$ כלומר $\alpha = 1 = \lambda_1 = \lambda_2, P_n(x) = 6x$ מכאן שהפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x) = x^2e^x(Ax + B)$ נציב את \tilde{y}', \tilde{y}'' בחשב את
במשוואה (כאשר $\tilde{y}(x) = e^x(Ax^3 + Bx^2)$) :

$$\tilde{y}'(x) = e^x(Ax^3 + Bx^2) + e^x(3Ax^2 + 2Bx) = e^x[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx],$$

$$\tilde{y}''(x) = e^x[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx] + e^x[3Ax^2 + (6A + 2B)x + 2B] = e^x[Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B] \Rightarrow$$

$$e^x[Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B] - 2e^x[Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx] + e^x(Ax^3 + Bx^2) = e^x \cdot 6x \Rightarrow$$

$$Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B - 2Ax^3 + (-6A - 2B)x^2 - 4Bx + Ax^3 + Bx^2 = 6x \Rightarrow$$

$$6Ax + 2B = 6x \Rightarrow$$

- $6A = 6 \Rightarrow A = 1$
- $2B = 0 \Rightarrow B = 0$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = x^3e^x$$

$$\Rightarrow \text{General Solution: } y(x) = e^x(c_1 + c_2x + x^3)$$

$$\text{ה. } y'' + y = 3 \sin 2x + x \cos 2x$$

פתרון המשוואה ההומוגנית :

$$y'' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow y_1(x) = e^{ix}, y_2(x) = e^{-ix} \Rightarrow y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$$

מתקיים: $g(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x] = 3 \sin 2x + x \cos 2x$ כלומר $\alpha = 0 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = x, Q_m(x) = 3, \beta = 2$ מכאן שהפתרון מהצורה: $\tilde{y}(x) = R_l(x) \cos 2x + S_l(x) \sin 2x$ $l = \max\{n, m\}$ נציב את \tilde{y}', \tilde{y}'' בחשב את

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(x) &= -2(Ax + B) \sin 2x + A \cos 2x + 2(Cx + D) \cos 2x + C \sin 2x = (2Cx + A + 2D) \cos 2x + (-2Ax - 2B + C) \sin 2x \\ \tilde{y}''(x) &= -2(2Cx + A + 2D) \sin 2x + 2C \cos 2x + 2(-2Ax - 2B + C) \cos 2x - 2A \sin 2x = \\ (2C - 4Ax - 4B + 2C) \cos 2x &+ (-4Cx - 2A - 4D - 2A) \sin 2x = (-4Ax - 4B + 4C) \cos 2x + (-4Cx - 4A - 4D) \sin 2x \Rightarrow \\ (-4Ax - 4B + 4C) \cos 2x &+ (-4Cx - 4A - 4D) \sin 2x + (Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x = 3 \sin 2x + x \cos 2x \Rightarrow \\ [(-3A)x + (-3B + 4C)] \cos 2x &+ [(-3C)x + (-4A - 3D)] \sin 2x = x \cos 2x + 3 \sin 2x \Rightarrow \end{aligned}$$

- $-3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$
- $-3B + 4C = 0 \Rightarrow C = \frac{3}{4}B$

- $-3C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow B = 0$
- $-4A - 3D = 3 \Rightarrow \frac{4}{3} - 3D = 3 \Rightarrow D = -\frac{5}{9}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = -\frac{1}{3}x \cos 2x - \frac{5}{9} \sin 2x \Rightarrow \text{General solution: } y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}x \cos 2x - \frac{5}{9} \sin 2x$$

$$: y'' + 2y' + y = e^x \cos x \text{ .ו}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -1 \Rightarrow \lambda = -1 (r = 2) \Rightarrow y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x}$$

מתקיים: $g(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x] = e^x \cos x$: ולכן הפתרון הוא

מהצורה: $\tilde{y}(x) = e^x (A \cos x + B \sin x)$. נחשב את \tilde{y}' , \tilde{y}'' ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}'(x) = e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x (-A \sin x + B \cos x) = e^x [(A+B) \cos x + (-A+B) \sin x]$$

$$\tilde{y}''(x) = e^x [(A+B) \cos x + (-A+B) \sin x] + e^x [-(A+B) \sin x + (-A+B) \cos x] = e^x [2B \cos x - 2A \sin x] \Rightarrow$$

$$e^x [2B \cos x - 2A \sin x] + 2e^x [(A+B) \cos x + (-A+B) \sin x] + e^x (A \cos x + B \sin x) = e^x \cos x \Rightarrow$$

$$(2B + 2A + 2B + A) \cos x + (-2A - 2A + 2B + B) \sin x = \cos x \Rightarrow (3A + 4B) \cos x + (-4A + 3B) \sin x = \cos x \Rightarrow$$

- $-4A + 3B = 0 \Rightarrow A = \frac{3}{4}B$
- $3A + 4B = \frac{9}{4}B + 4B = 1 \Rightarrow B = \frac{4}{25} \Rightarrow A = \frac{3}{25}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = e^x \left(\frac{3}{25} \cos x + \frac{4}{25} \sin x \right) \Rightarrow \text{General solution: } y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + e^x \left(\frac{3}{25} \cos x + \frac{4}{25} \sin x \right)$$

$$: y'' + y' + y = \sin^2 x \text{ .ז}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + y' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow y_{1,2}(x) = e^{\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}x} \Rightarrow$$

$$y_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, y_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

מתקיים: $g(x) = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, נסתכל על $g(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$ ו-

• $y'' + y' + y = \frac{1}{2}$: מתקיים $g(x) = e^{\alpha x} P(x)$ ולכן $\alpha = 0 (\neq \lambda_1, \lambda_2)$, $P_n(x) = \frac{1}{2}$ ומכאן הפתרון מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = A$, ולכן

$$\tilde{y}'(x) = \tilde{y}''(x) = 0 \text{ . מכאן } 0 + 0 + A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ . הפתרון: } \tilde{y}(x) = \frac{1}{2}$$

• $y'' + y' + y = -\frac{1}{2} \cos 2x$: מתקיים $g(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$ ולכן $\alpha = 0 (\neq \lambda_1, \lambda_2)$, $\beta = 2$, $P_n(x) = -\frac{1}{2}$, ולכן

$Q_m(x) = 0$, ומכאן הפתרון מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} [A \cos 2x + B \sin 2x] = A \cos 2x + B \sin 2x$ נחשב את \tilde{y}' , \tilde{y}'' ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}'(x) = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad \tilde{y}''(x) = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x \Rightarrow$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x - 2A \sin 2x + 2B \cos 2x + A \cos 2x + B \sin 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow$$

$$(-3A + 2B) \cos 2x + (-3B - 2A) \sin 2x = -\frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow$$

- $-3B - 2A = 0 \Rightarrow B = -\frac{2}{3}A$
- $-3A + 2B = -\frac{1}{2} \Rightarrow -3A - \frac{4}{3}A = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{13}{3}A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{26} \Rightarrow B = -\frac{2}{26} = -\frac{1}{13}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(x) = \frac{3}{26} \cos 2x - \frac{1}{13} \sin 2x$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{3}{26} \cos 2x - \frac{1}{13} \sin 2x$.

$$א. y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \Rightarrow y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \sin x$$

מתקיים: $g(x) = e^x \cdot 4$ ומכאן $\alpha = 1 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = 4$ ולכן הפתרון הוא מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = Ae^x$ נחשב את \tilde{y}', \tilde{y}'' ונציב

$$\text{במשוואה: } \tilde{y}'(x) = \tilde{y}''(x) = \tilde{y}(x) = Ae^x \text{ ומכאן:}$$

$$Ae^x + Ae^x = 4e^x \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow \tilde{y}(x) = 2e^x$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2e^x$. נציב את תנאי ההתחלה למציאת הפתרון הפרטי:

- $c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 + 2e^0 = c_1 + 2 = 4 \Rightarrow c_1 = 2$
- $y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 + 2e^0 = c_2 + 2 = -3 \Rightarrow c_2 = -5$

$$\Rightarrow y(x) = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x$$

$$ב. y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' - 2y' = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{2x}$$

מתקיים: $g(x) = e^x \cdot 2$ ומכאן $\alpha = 1 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = 2$ ולכן הפתרון הוא מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = Ae^x$ נחשב את \tilde{y}', \tilde{y}'' ונציב

$$\text{במשוואה: } \tilde{y}'(x) = \tilde{y}''(x) = \tilde{y}(x) = Ae^x \text{ ומכאן:}$$

$$Ae^x - 2Ae^x = 2e^x \Rightarrow -A = 2 \Rightarrow A = -2 \Rightarrow \tilde{y}(x) = -2e^x$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} - 2e^x$. נציב את תנאי ההתחלה למציאת הפתרון הפרטי:

- $y'(1) = 2c_2 e^2 - 2e = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{e}$
- $y(1) = c_1 + \frac{1}{e} e^2 - 2e = -1 \Rightarrow c_1 - e = -1 \Rightarrow c_1 = e - 1$

$$\Rightarrow y(x) = e - 1 + e^{2x-1} - 2e^x$$

$$ג. y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, y(0) = y'(0) = 0$$

פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i \Rightarrow y_1(x) = e^{-x} \cos x, y_2(x) = e^{-x} \sin x$$

מתקיים: $g(x) = e^{-x} \cdot x$ ומכאן $\alpha = -1 (\neq \lambda_1, \lambda_2), P_n(x) = x$ ולכן הפתרון הוא מהצורה $\tilde{y}(x) = e^{\alpha x} Q_n(x) = e^{-x}(Ax + B)$ נחשב את

\tilde{y}', \tilde{y}'' ונציב במשוואה:

$$\tilde{y}'(x) = -e^{-x}(Ax + B) + Ae^{-x} = e^{-x}(-Ax + A - B), \quad \tilde{y}''(x) = -e^{-x}(-Ax + A - B) - Ae^{-x} = e^{-x}(Ax - 2A + B) \Rightarrow$$

$$e^{-x}(Ax - 2A + B) + 2e^{-x}(-Ax + A - B) + 2e^{-x}(Ax + B) = xe^{-x} \Rightarrow$$

$$(A - 2A + 2A)x - 2A + B + 2A - 2B + 2B = x \Rightarrow Ax + B = x \Rightarrow A = 1, B = 0 \Rightarrow \tilde{y}(x) = xe^{-x}$$

ומכאן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = e^{-x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x + x]$. נציב את תנאי ההתחלה למציאת הפתרון הפרטי:

- $y(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$
- $y'(x) = -e^{-x}[c_1 \cos x + c_2 \sin x + x] + e^{-x}[-c_1 \sin x + c_2 \cos x + 1] = e^{-x}[(-c_1 + c_2) \cos x - (c_1 + c_2) \sin x - x + 1]$
 $\Rightarrow y'(0) = -c_1 + c_2 + 1 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$

$$\Rightarrow y(x) = e^{-x}[x - \sin x]$$

(10)

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0 \quad \text{א.}$$

הפולינום האופייני: $p(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q = \lambda^2 + 5\lambda + 4$ מקיים $p, q > 0$. לפי קריטריון R-H המשוואה יציבה, וכיוון שהמשוואה במקדמים קבועים, היא יציבה אסימפטוטית.

$$y'''' + 6y''' + 12y'' + 8y' = 0 \quad \text{ב.}$$

הפולינום האופייני: $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = 0$ מתקיים: $a_1, a_2, a_3 > 0$ וגם $a_3 = 8 < 6 \cdot 12 = a_1 \cdot a_2$. לפי קריטריון R-H המשוואה יציבה, ולכן יציבה אסימפטוטית.

$$y'''' + 6y''' + 11y'' + 6y' = 0 \quad \text{ג.}$$

הפולינום האופייני: $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$ מתקיים: $a_1, a_2, a_3 > 0$ וגם $a_3 = 6 < 6 \cdot 11 = a_1 \cdot a_2$. לפי קריטריון R-H המשוואה יציבה, ולכן יציבה אסימפטוטית.

$$y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = 0 \quad \text{ד.}$$

הפולינום האופייני: $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = \lambda^2(\lambda + 2)^2$ ומכאן: $\lambda_1 = 0$ ($r_1 = 2$), $\lambda_2 = -2$ ($r_2 = 2$). מכאן שפתרון המד"ר הוא: $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4xe^{-2x}$. מתקיים: $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} c_1 + \infty + 0 + 0 = \infty$. ובפרט לא יציבה אסימפטוטית.

(11)

נתון: $\ddot{x} + k\dot{x} + \sin x = 0$ עבור $k > 0$. נסמן $y = \dot{x}$ ונקבל: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ky - \sin x \end{cases}$ ומכאן נקבל את השדה הוקטורי $V = (y, -ky - \sin x)$.

א. לינארזציה:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -k \end{pmatrix} \cdot \xi:$$

- $x_0 = (0, 0)$: $\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -k \end{pmatrix} |_{(0,0)} \cdot \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} \xi$
- $x_0 = (\pi, 0)$: $\dot{\xi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -k \end{pmatrix} |_{(\pi,0)} \cdot \xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \xi$

ב. יציבות:

$$x_0 = (0, 0): \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -k - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + k) + 1 = \lambda^2 + k\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

ידוע כי $k > 0$, ולכן ישנם שני מקרים: אם $0 < k < 2$, נקבל כי $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$ ויתקיים $Re(\lambda_{1,2}) = -\frac{k}{2} < 0$ והמשוואה יציבה אסימפטוטית. אם

$k \geq 2$, נקבל שורשים ממשיים, וכיוון שבכל מקרה $k > \sqrt{k^2 - 4}$ אז $\lambda_{1,2} < 0$ וגם במקרה זה המשוואה יציבה אסימפטוטית.

$$x_0 = (\pi, 0): \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -k - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + k\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2} \Rightarrow$$

השורשים ממשיים ואחד מהם חיובי, ולכן המשוואה אינה יציבה (אסימפטוטית).

(12)

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + x^3 \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

א. נקודות קריטיות:

$$V = (-2x + y + x^3, -x - 2y + 3x^5) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + x^3 = 0 \\ -x - 2y + 3x^5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - x^3 \\ y = \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow 2x - x^3 = \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{2}x \Rightarrow$$

$$4x - 2x^3 = 3x^5 - x \Rightarrow 3x^5 + 2x^3 - 5x = 0 \Rightarrow x(3x^4 + 2x^2 - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$\left[t := x^2 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6} \Rightarrow t_1 = -\frac{10}{6} \text{ (irrelevant)}, t_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \right]$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1 \Rightarrow$$

הנקודות הקריטיות הן: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

ב. לינאריזציה:

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x} & \frac{\partial V_1}{\partial y} \\ \frac{\partial V_2}{\partial x} & \frac{\partial V_2}{\partial y} \end{pmatrix} \xi = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2 & 1 \\ 15x^4 - 1 & -2 \end{pmatrix} \xi \Rightarrow$$

- $(0,0): \dot{\xi} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \xi$
- $(1,1): \dot{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \xi$
- $(-1,-1): \dot{\xi} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \xi$

ג. יציבות:

- $\left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} - \lambda I \right| = \left| \begin{matrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{matrix} \right| = (\lambda + 2)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i \Rightarrow \text{Re}(\lambda) < 0$
מכאן שהמשוואה יציבה אסימפטוטית.

- $\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} - \lambda I \right| = \left| \begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{matrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 14 = \lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2 - 14 = \lambda^2 - \lambda - 16 = 0 \Rightarrow$
 $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{65}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{65}}{2} > 0 \Rightarrow \text{Re}(\lambda_1) > 0$

מכאן שהמשוואה אינה יציבה (ובפרט אינה אסימפטוטית).