

מד"ר 1 – תרגיל בית 6

הערה: שאלות על יציבות ניתן להשלים לאחר תרגול 7.

(1) נניח $(V, \|\cdot\|)$ מרחב נורמה ממימד סופי. הוכח כי המרחב $L(V)$ של האופרטורים הליניארים ב- V הוא מרחב נורמה, אם נגדיר נורמה של אופרטור באופן הבא:

$$|A| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

(2) נניח A, P מטריצות $n \times n$ כאשר $\det P \neq 0$. הוכח: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$

(3) תהי A מטריצה $n \times n$. ע"י תכונת חזקות של e^A תן הוכחה של שורה אחת כי: $\det(e^A) \neq 0$

(4) תהי A מטריצה $n \times n$ כך ש $A^t = -A$ (skew-symmetric) הוכח כי e^A אורתוגונלית. (תזכורת: מטריצה B היא אורתוגונלית אם $B^t B = 1$)

(5) יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ע"ע של מטריצה A ($n \times n$). הוכח שהערכים העצמיים של e^A הם בדיוק $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n}$.

(6) חשב את הוורונסקיאן:

$$y_1(x) = 1, y_2(x) = x^2.$$

$$y_1(x) = e^{-x}, y_2(x) = xe^{-x}.$$

$$y_1(x) = \cos x, y_2(x) = \cos(2x).$$

$$y_1(x) = \sin x, y_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$y_1(x) = \sin^2 x, y_2(x) = \cos(2x).$$

(7) פתור את המשוואות ההומוגניות הבאות:

$$y'' - 2y' = 0.$$

$$y'' - 6y' + 9 = 0.$$

$$y'' + 2y' + 10y = 0.$$

$$y'' + 4y = 0.$$

(8) פתור את המשוואות הלא הומוגניות הבאות:

$$y'' - 4y = 8x^3.$$

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}.$$

$$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}.$$

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x.$$

$$y'' + y = 3 \sin 2x + x \cos 2x.$$

$$y'' + 2y' + y = e^x \cos x.$$

$$y'' + y' + y = \sin^2 x.$$

9) עבור המשוואות הבאות:

a. מצא פתרון כללי למשוואה

b. פתור את בעיית ההתחלה

$$y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$$

$$y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0.$$

$$y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, y(0) = y'(0) = 0.$$

10) חקור יציבות ויציבות לחלוטין (אסימפטוטית) עבור המשוואות:

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0;$$

$$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0;$$

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0;$$

$$y^{IV} + 4y''' + 4y'' = 0.$$

11) עבור המשוואה $\ddot{x} + k\dot{x} + \sin x = 0$ with $k > 0$

a. מצא את הלינאריזציה עבור הנקודות הקריטיות $(0,0)$ ו- $(\pi, 0)$

b. חקור את היציבות בנקודות אלה.

12) עבור מערכת המשוואות

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + x^3, \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

a. מצא את כל הנקודות הקריטיות.

b. כתוב את הלינאריזציה ליד כל נקודה קריטית

c. חקור את היציבות.

פתרונות:

(7)

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{3x}.$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

(8)

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x^3 - 3x.$$

$$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}.$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{4}{5} e^{-x} - \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right) e^{-x}.$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + x^3) e^x.$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3} x \cos 2x - \frac{5}{9} \sin 2x.$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{1}{25} e^x (3 \cos x + 4 \sin x).$$

$$y = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{13} \sin 2x + \frac{3}{26} \cos 2x.$$

(9)

$$y(x) = 2 \cos x - 5 \sin x + 2e^x.$$

$$y(x) = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1.$$

$$y(x) = e^{-x} (x - \sin x).$$

(11) יציב לחלוטין (אסימפטוטית) ליד $(0,0)$, לא יציב ליד $(\pi, 0)$

(12) יציב לחלוטין (אסימפטוטית) ליד $(0,0)$, לא יציב ליד $(1,1)$, $(-1,-1)$