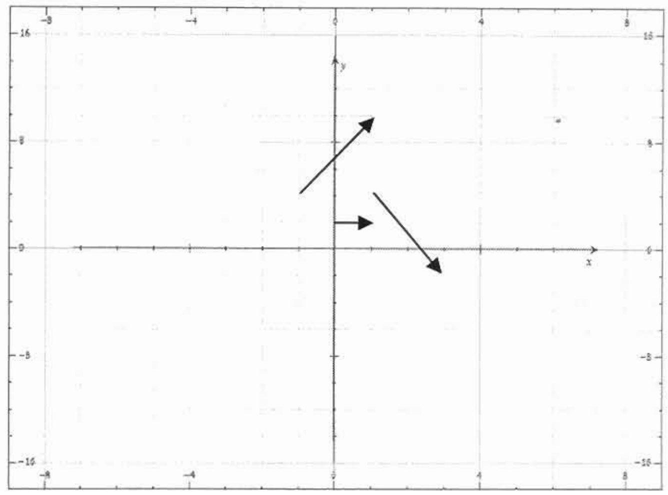
<u>מד"ר 1 / תרגיל בית #4</u>

אריאל סטולרמן

(1) מתקיים: $\gamma(t) = (cost, sint) = \left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \gamma'(t) = \left(-sin\left(\frac{\pi}{3}\right), cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

(i) $x'' + 3x = 0$:



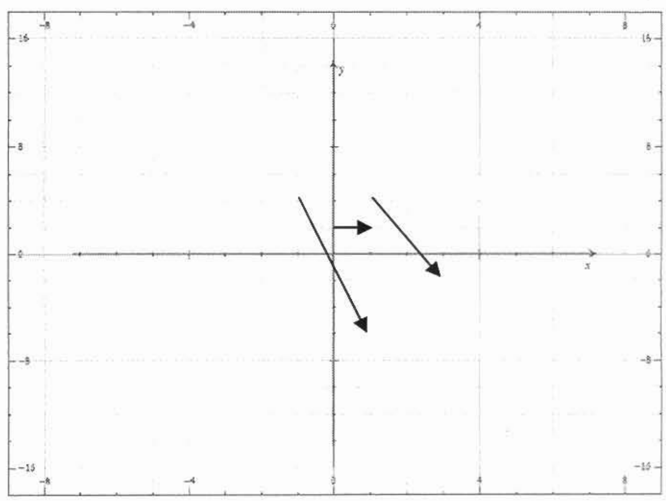
$a. \begin{cases} x' = y \\ y' = -3x \end{cases} \Rightarrow F(x,y) = (y,-3x)$

$b. F(0,1) = (1,0), F(1,2) = (2,-3), F(-1,2) = (2,3)$

$c. F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ו-$\gamma'\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ לא מקבילים או הפוכים, ולכן γ לא יכולה להיות קו פאזה למערכת בנקודה זו.

(ii) $x'' - x + 4x^2 = 0$:



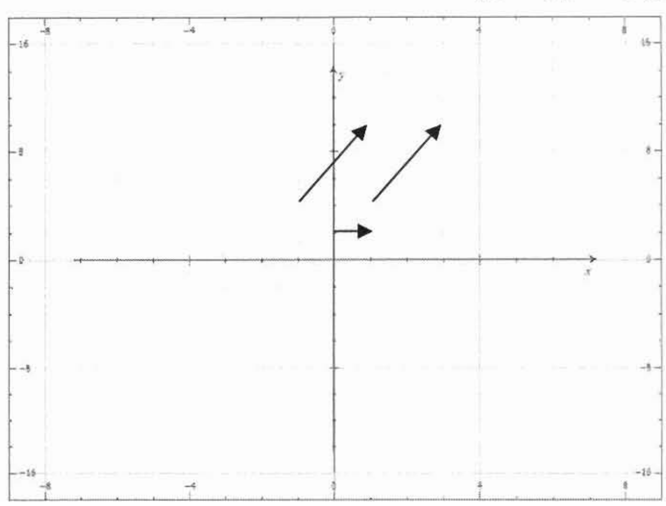
$a. \begin{cases} x' = y \\ y' = x - 4x^2 \end{cases} \Rightarrow F(x,y) = (y, x - 4x^2)$

$b. F(0,1) = (1,0), F(1,2) = (2,-3), F(-1,2) = (2,-5)$

$c. F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ הפוך ל-$\gamma'\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ולכן γ יכולה להיות קו פאזה למערכת בנקודה זו.

(iii) $x'' - 3x^2 = 0$:



$a. \begin{cases} x' = y \\ y' = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow F(x,y) = (y, 3x^2)$

$b. F(0,1) = (1,0), F(1,2) = (2,3), F(-1,2) = (2,3)$

$c. F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ו-$\gamma'\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ לא מקבילים או הפוכים, ולכן γ לא יכולה להיות קו פאזה למערכת בנקודה זו.

(2)

$x''+x-3x^2=0$ (i):

a. $\begin{cases} x'=y \\ y'=3x^2-x \end{cases}$

b. $u'(x)=f(x)=x-3x^2 \Rightarrow u(x)=\int(x-3x^2)dx=\frac{x^2}{2}-x^3 \Rightarrow$ *First integral*: $\frac{x'^2}{2}+\frac{x^2}{2}-x^3=E$

c. $f(x)=0 \Rightarrow x-3x^2=0 \Rightarrow \quad x_1=0, x_2=\frac{1}{3}$

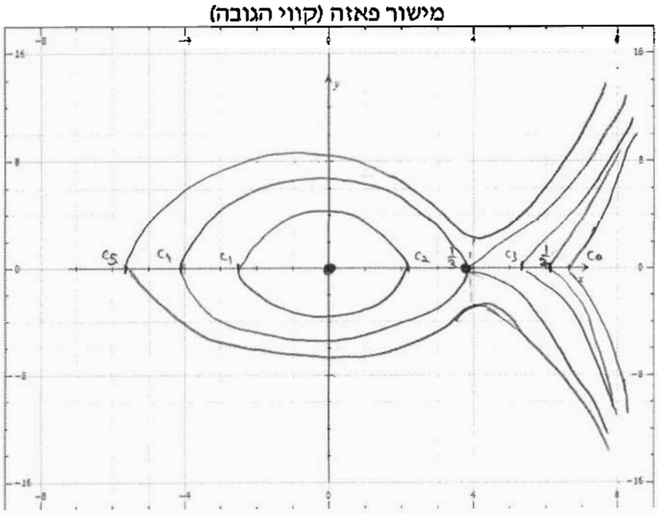
$F(x,y)=(y,3x^2-x),\;\; F(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow y=0, f(x)=0 \Rightarrow$ *Critical points*: $(0,0),\left(\frac{1}{3},0\right)$

d.

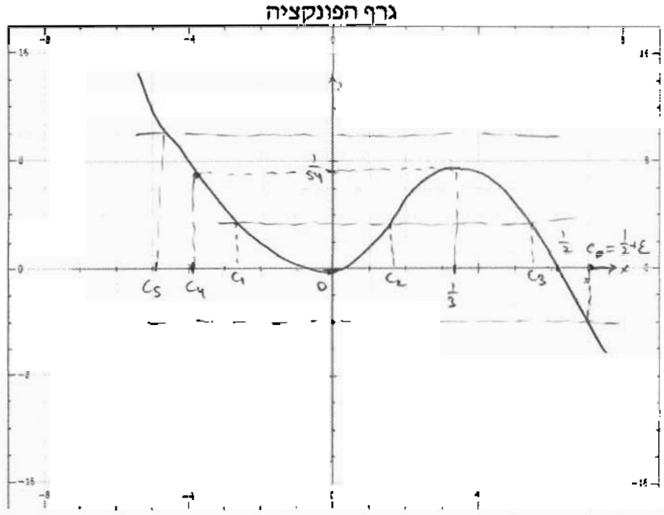
נשים לב כי $u(0)=0, u\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{54}$. נסמן $x'=y$ ומתקיים: $y=\pm\sqrt{2E+2x^3-x^2}$.

- $E<0$: $\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-x^3=E<0$ ומכאן $\frac{x^2}{2}-x^3<0$ ולכן $x>\frac{1}{2}$.
- $E=0$: $\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-x^3=0$ ומכאן $\frac{x^2}{2}-x^3\le 0$ ולכן $x\ge\frac{1}{2}$, $x=0$ – נקי חיתוך הפוני עם ציר ה-x. בתחום זה: $y=\pm x\sqrt{2x-1}$.
- $0<E<\frac{1}{54}$: תחום ה-x הוא: $[c_1,c_2]\cup[c_3,\infty)$ כאשר $u(c_1)=u(c_2)=u(c_3)=E$.
- $E=\frac{1}{54}$: תחום ה-x הוא $[c_5,\infty)$.
- $\frac{1}{54}<E$: תחום ה-x הוא $[c_5,\infty)$.

מישור פאזה (קווי הגובה)



גרף הפונקציה



$x''-8x+8x^2=0$ (ii):

a. $\begin{cases} x'=y \\ y'=8x-8x^2 \end{cases}$

b. $u'(x)=f(x)=-8x+8x^2 \Rightarrow u(x)=\int(-8x+8x^2)dx=-4x^2+\frac{8}{3}x^3 \Rightarrow$ *First integral*: $\frac{x'^2}{2}-4x^2+\frac{8}{3}x^3=E$

c. $f(x)=0 \Rightarrow 8x(x-1)=0 \Rightarrow \quad x_1=0, x_2=1$

$F(x,y)=(y,8x-8x^2), \qquad F(x,y)=(0,0) \Leftrightarrow y=0, f(x)=0 \Rightarrow$ *Critical points*: $(0,0),(1,0)$

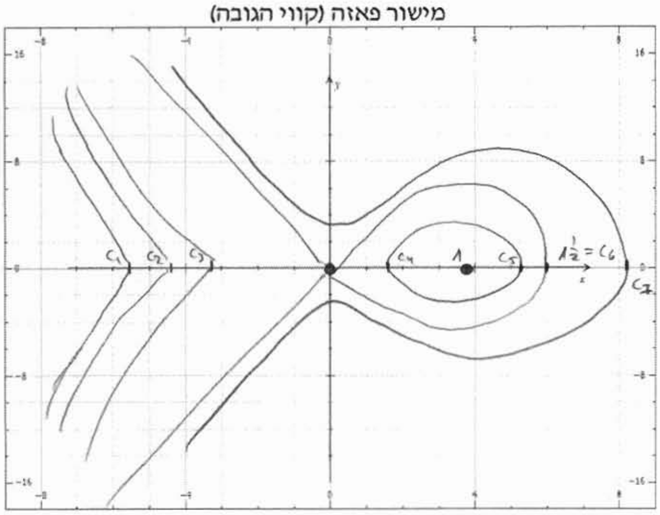
d.

נשים לב כי $u(0)=0, u(1)=-1\frac{1}{3}$. נסמן $y=x'$ ומתקיים: $y=\pm\sqrt{2E+8x^2-5\frac{1}{3}x^3}$. המקרים שצריך לבדוק:

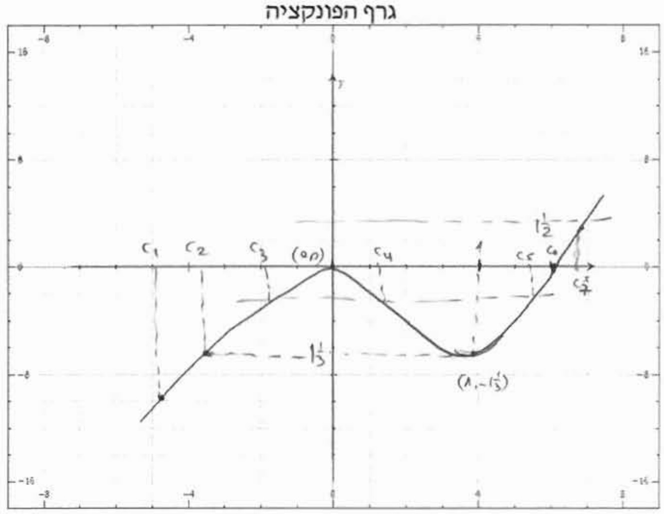
- $E<-1\frac{1}{3}$: תחום ה-x הוא $(-\infty,c_1]$ כאשר $u(c_1)=E$.
- $E=-1\frac{1}{3}$: תחום ה-x הוא $(-\infty,c_2]\cup\{1\}$.

- $-1\frac{1}{3} < E < 0$: תחום ה-x הוא $[c_4, c_5]\cup(-\infty, c_3]$.
- $E = 0$: תחום ה-x הוא $(-\infty, c_6]$ כאשר $c_6 = 1\frac{1}{2}$ - חיתוך ציר ה-x.
- $0 < E$: תחום ה-x הוא $(-\infty, c_7]$.

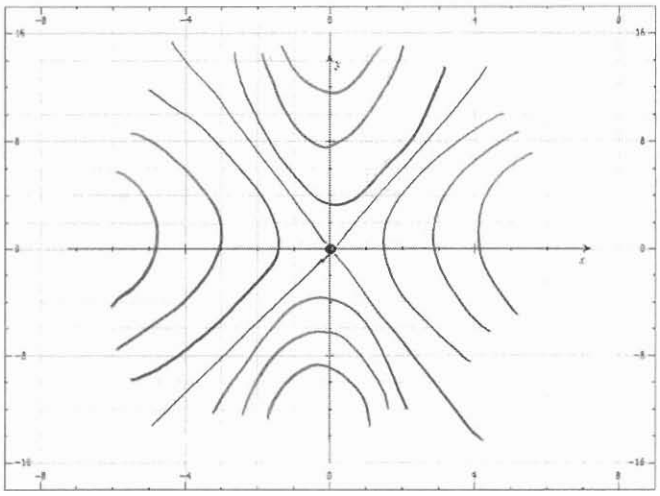
מישור פאזה (קווי הגובה)



גרף הפונקציה



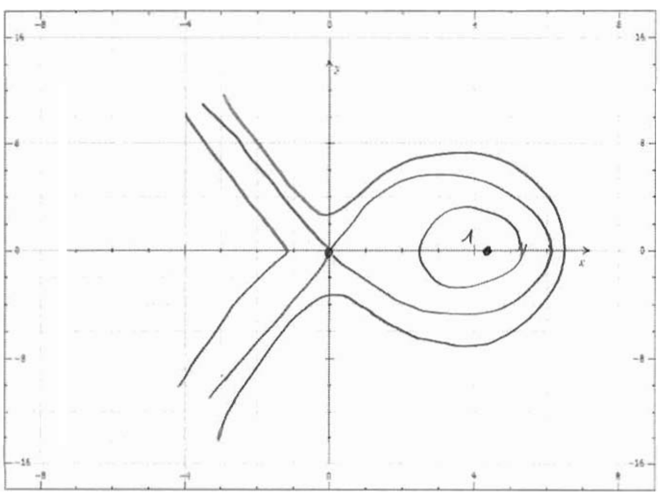
(3)



א. $x'' - x = 0$: $\begin{cases}x' = y\\ y' = x\end{cases}$, הנקודות הקריטיות הן: $f(x) = -x = 0$ ולכן $(0,0)$ נקודה קריטית.

מתקיים: $u(x) = \int -x dx = -\frac{x^2}{2}$, ולכן בגרף הנקודה הקריטית היא $(0,0)$, $u''(0) = -1$ ולכן זו נקי מקסימום.

האינטגרל הראשון הוא: $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = E$, ולכן $y = \pm\sqrt{2E + x^2}$. המקרים השונים הם: $E = 0$ - נקבל שני קווים ישרים (4 קוי פאזה ונקודה סינגולרית), $E < 0, E > 0$: פרבולות והיפרבולות.



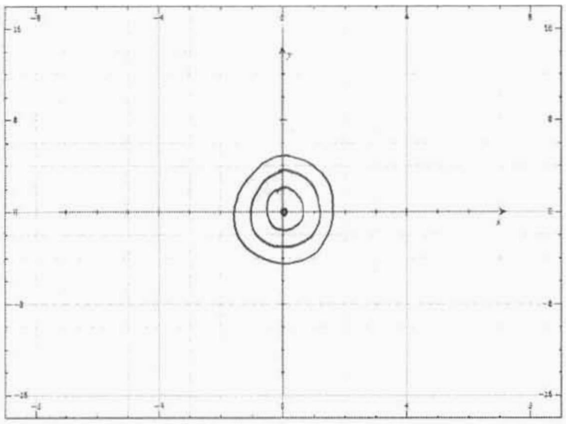
ב. $x'' - x + x^2 = 0$: $\begin{cases}x' = y\\ y' = x - x^2\end{cases}$, הנקודות הקריטיות הן: $f(x) = 0$, ולכן $x = 0, 1$ נקודות קריטיות.

מתקיים: $u(x) = \int -x + x^2 dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$, ולכן בגרף הנקודות הקריטיות הן $(0,0)$ ו-$\left(1, -\frac{1}{6}\right)$. $u''(x) = -1 + 2x$ ולכן הראשונה מקסימום והשניה מינימום. האינטגרל הראשון: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} = E$,

כמו בשאלה (2) סעיף ב', כאשר $y = \pm\sqrt{2E - \frac{2x^3}{3} + x^2}$

ג. $x''+2x^3=0$: $\begin{cases}x'=y\\y'=-2x^3\end{cases}$, הנקודות הקריטיות הן : $f(x)=0$ ולכן $x=0$.

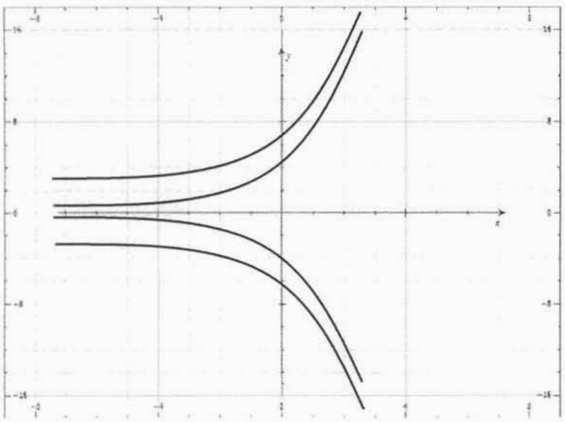
מתקיים : $u(x)=\int 2x^3dx=\frac{x^4}{2}$ - פרבולה, כמו שראינו בכיתה.



ד. $\begin{cases}x'=e^x-1\\y'=ye^x\end{cases}$: נמצא את המד"ר :

$$\frac{y'}{x'}=\frac{dy}{dx}=\frac{ye^x}{e^x-1}=\frac{y}{1-e^{-x}}\Rightarrow\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{1-e^{-x}}dx=\int\frac{e^x}{e^x-1}dx\Rightarrow$$
$$ln|y|=ln|e^x-1|\Rightarrow y=\pm(e^x-1)+c=\pm e^x+c$$

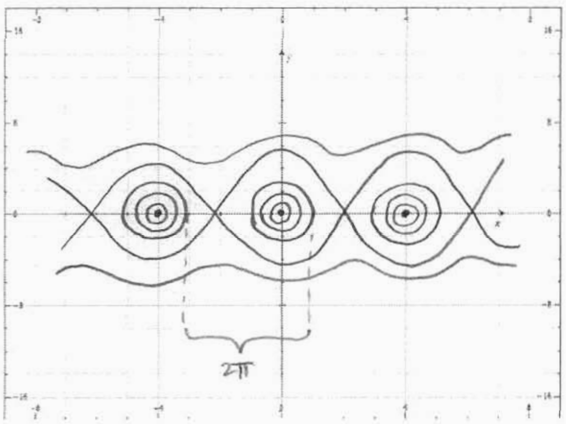
- e^x+c
- $-e^x+c$



ה. $\begin{cases}x'=y\\y'=-sinx\end{cases}$: נמצא את המד"ר :

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{sinx}{y}\Rightarrow \underbrace{sinx}_{M}dx+\underbrace{y}_{N}dy=0;\quad M_y=N_x=0\Rightarrow exact$$
$$u(x,y)=\int sinxdx+\psi(y)=-cosx+\psi(y)$$
$$u_y=\frac{d}{dy}\left(\int sinxdx+\psi(y)\right)=\psi'(y)=N=y\Rightarrow\psi(y)=\frac{y^2}{2}\Rightarrow$$
$$solution:-\ cosx+\frac{y^2}{2}=c\Rightarrow y=\pm\sqrt{2c+2cosx}$$

- $c=0$: $y=\pm\sqrt{2cosx}$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi k\le x\le\frac{\pi}{2}+2\pi k$
- $c>0$: עד $c=1$ יהיו חיתוכים עם ציר ה-x, ומעבר לכך כבר לא.
- $c<0$: מוגדר עד $c=-1$.



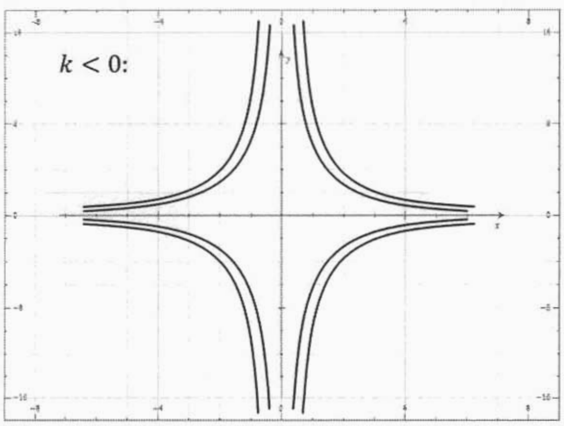
ו. $\begin{cases}x'=x\\y'=ky\end{cases}$: נמצא את המד"ר :

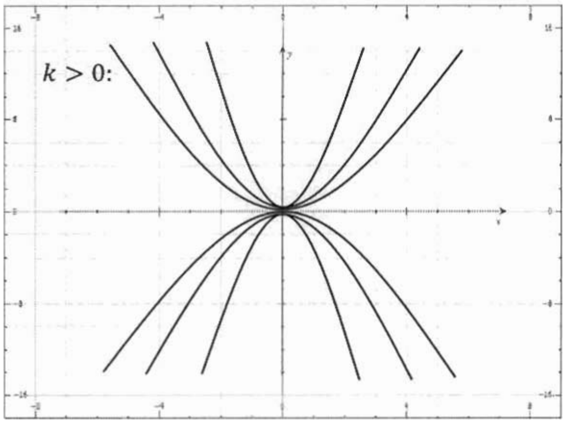
$$\frac{y'}{x'}=\frac{dy}{dx}=\frac{ky}{x}\Rightarrow\frac{1}{k}\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow\frac{1}{k}ln|y|=ln|x|+c'\Rightarrow$$
$$ln|y|=k\cdot ln|x|+kc\Rightarrow|y|=e^{kc}\cdot|x|^k\Rightarrow$$

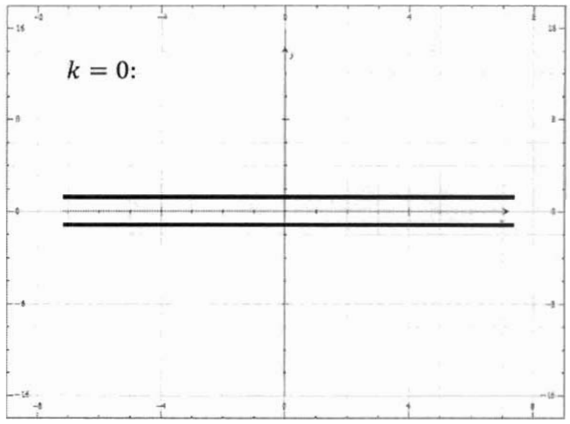
$y=\pm e^{kc}\cdot x^k$ - לכל c יהיה קו פאזה

נקבע את k ונבדוק את מישורי הפאזה השונים המתקבלים :

- $k<0$: מישור הפאזה יהיה מהצורה $d_1\cdot\frac{1}{x^{d_2}}$ עבור $d_1\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, d_2\in\mathbb{R}_+$.
- $k=0$: מישור הפאזה יכיל שני קווי פאזה : $y=1, y=-1$.
- $k>0$: מישור הפאזה יהיה פרבולות חיוביות ושליליות עבור k זוגי (חיתוך ב-(0,0), כלומר כל פרבולה היא למעשה 2 קוי פאזה וראשית הצירים נק' סינגולרית), ועבור k אי זוגי – תמונה זהה (כמו חיתוך x^3 ו-$-x^3$). המקדם יקבע את רוחב הפרבולות.

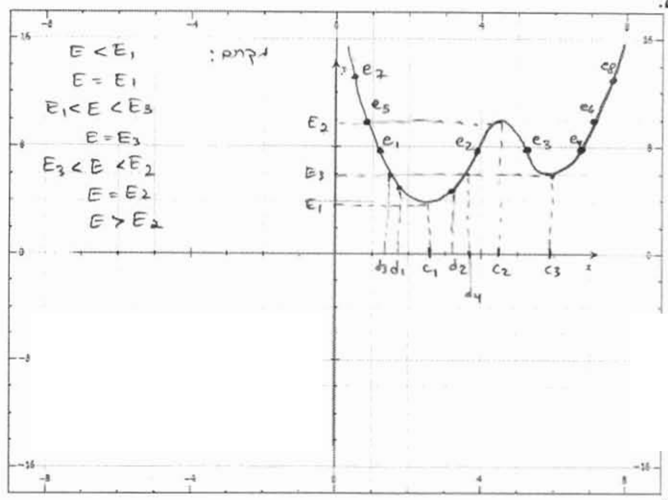


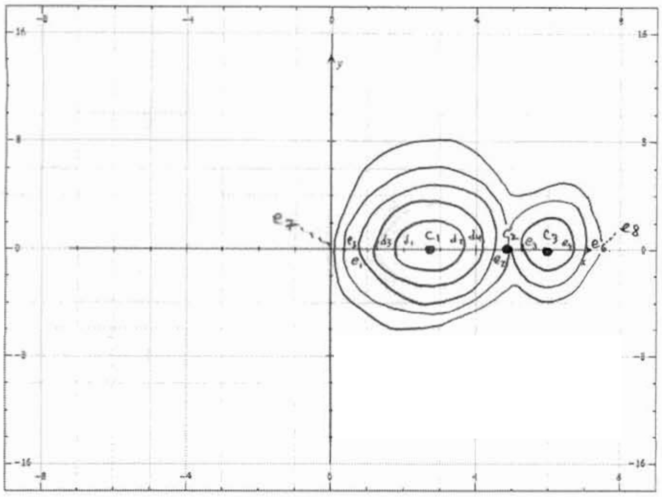

$k > 0$:


$k = 0$:

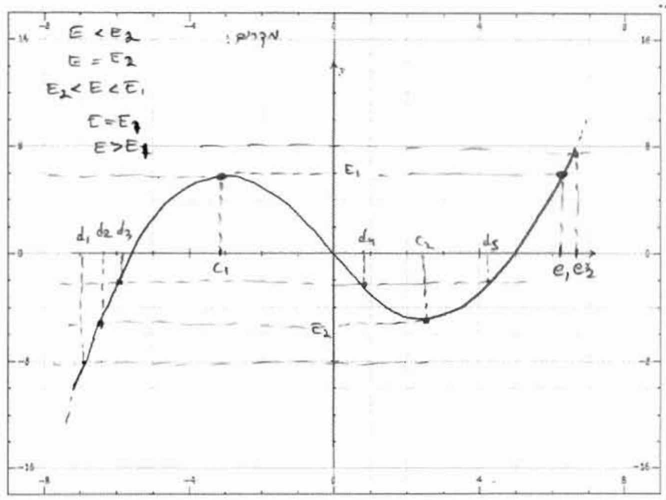
מישור פאזה (קווי הגובה)	גרף הפונקציה

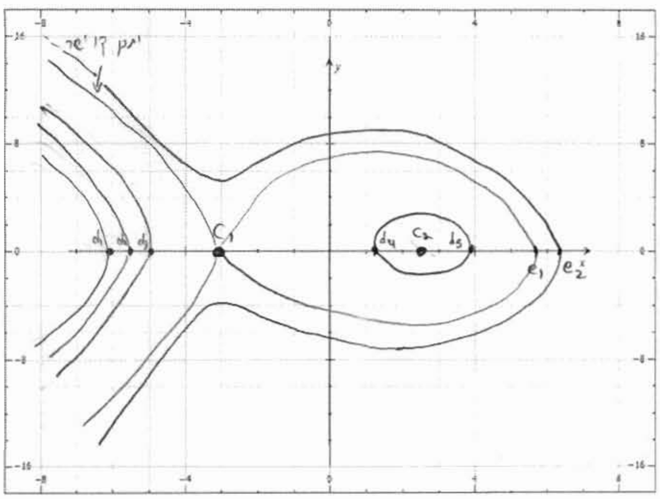
א.





ב.





ג.