

סיכומים למבחן באנליזה נומרית 1

סמסטר ב' 2010 (פרופ' דוד ליון)

: Floating point

הצגת מספרים ב-64 ביטים: $\boxed{\text{sgn}}_{b_{63}} \boxed{\text{exponent}}_{b_{62} \dots b_{52}} \boxed{\text{mantissa}}_{b_{51} \dots b_0}$

- $b_0 - b_{51}$: מייצגים את ה-mantissa, כאשר $\frac{1}{2} \leq m < 1$

- $b_{52} - b_{62}$: מייצגים את ה-exponent E

- b_{63} : מייצג את הסימן S

ייצוג המספר: $(-1)^S \cdot [1 + b_{51} \cdot 2^{-1} + b_{50} \cdot 2^{-2} + \dots + b_0 \cdot 2^{-52}] \cdot 2^{E-1023}$

זה אומר שייצוג עשרוני של מספר הוא בערך עד (כולל) הספרה ה-15 מימין לנקודה.

סימוני 0 גדול ו-0 קטן:

עבור פונקציות f, g נאמר:

- $f(x) = O(g(x))$ כאשר $x \rightarrow \infty$: קיים x_0 כך שלכל $x \geq x_0$ $|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$ עבור קבוע C כלשהו (שאיפת $f(x)$ כש- $x \rightarrow \infty$ חסומה מנקודה מסוימת ע"י שאיפת $g(x)$).

- $f(x) = o(g(x))$ כאשר $x \rightarrow \infty$: לכל $\epsilon > 0$ קיים x_0 כך שלכל $x \geq x_0$ $|f(x)| \leq \epsilon \cdot |g(x)|$, או לחילופין: $\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \rightarrow 0$ כ- $x \rightarrow \infty$.

נניח כי $f(n) = O(1)$, $g(n) = O(f(n))$, $\beta_n = \beta + O(g(n))$, $\alpha_n = \alpha + O(f(n))$:

- $\alpha_n + \beta_n = \alpha + \beta + O(f(n))$

- $\alpha_n \cdot \beta_n = \alpha \cdot \beta + O(f(n))$

שגיאה:

- **שגיאה אבסולוטית:** עבור ערך x וקירוב \tilde{x} השגיאה האבסולוטית היא: $e_{abs} = |x - \tilde{x}| = \delta x$

- **שגיאה יחסית:** $e_{rel} = \left| \frac{x - \tilde{x}}{x} \right| = \left| \frac{\delta x}{x} \right|$ - ככל שקרובה ל-1, כך הקירוב פחות טוב. ככל שקרובה ל-0, כך הוא יותר טוב.

משפט הקירוב של Weierstrass (לא צריך ללמוד הוכחה):

- תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ברווח סופי סגור $[a, b]$.

- לכל $\epsilon > 0$ קיים $n = n(\epsilon)$ (תלוי ϵ) ופולינום ממעלה n : $p_n(x)$ כך שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים: $|f(x) - p_n(x)| \leq \epsilon$.

כלומר כל ϵ tolerance מגדיר פולינום המקרב אותנו עד כדי ϵ ל- f .

פולינומי ברנשטיין:

מרחב הפולינומים הוא מרחב וקטורי של פונקציות. פולינומי ברנשטיין מוגדרים מעל $[0, 1]$: $B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, $0 \leq k \leq n$

הם מהווים בסיס לפולינומים ממעלה n . תכונות:

- $x \in [0, 1], B_k^n(x) \geq 0$

- $\sum_{k=0}^n B_k^n(x) \equiv 1$ (לפי הבינום)

- $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} B_k^n(x) \equiv x$

- $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} B_k^n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x^2 + \frac{1}{n} \cdot x = x^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)$

- $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_k^n(x) = \frac{x(1-x)}{n}$

בהוכחת משפט Weierstrass משתמשים בבניה: $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot B_k^n(x)$ - דוגמים את הפונקציה במרווחים של $\frac{1}{n}$.

תכונת רציפות של פונקציה:

אם f רציפה ב- $[0,1]$ אז קיים M כך ש:

• $|f(x)| \leq M$ לכל $x \in [0,1]$.

• לכל $\epsilon > 0$ קיים δ כך ש- $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon$ אם $|x_1 - x_2| \leq \delta$, $x_1, x_2 \in [0,1]$.

משפט Chebyshev (קירוב טוב ביותר):

• תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ברווח סופי סגור $[a, b]$.

• אז קיים פולינום יחיד ממעלה n שהוא המקרב הטוב ביותר ל- f בנורמת המקסימום, $\|f - p_n\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)|$.

• p_n הוא המקרב הטוב ביותר ל- f בנורמת המקסימום אם יש $n + 2$ נקודות $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$ כך ש:

$$|f(x_i) - p_n(x_i)| = (-1)^i \cdot \epsilon \cdot \|f - p_n\|, \quad \epsilon = \text{sign}(f(x_0) - p_n(x_0))$$

אינטרפולציה ע"י פולינום:

בעית האינטרפולציה:

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ונתונים ערכי f בנקודות x_0, \dots, x_n (שונות זו מזו): $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$. רוצים למצוא פולינום $p \in \Pi_n$ (מרחב הפולינום ממעלה $n \geq 0$) שמקיים את תנאי האינטרפולציה: $p(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$.

<<< הוכחת יחידות פולינום אינטרפולציה:

נניח כי $p, q \in \Pi_n$ שני פולינומים שמקיימים את תנאי האינטרפולציה, ונגדיר פולינום הפרש: $r = p - q$. ברור כי $r \in \Pi_n$ ולכל $i = 0, \dots, n$ מתקיים

$$r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0$$

טענת עזר: אם $r \in \Pi_n$ ו- $r(x_i) = 0$ לכל $i = 0, \dots, n$ (נקודות שונות) אז $r \equiv 0$.

הוכחה: כיוון ש- $r(x_0) = 0$ אז ניתן להוציא גורם משותף $(x - x_0)$ ע"י פיתוח טיילור סופי סביב x_0 :

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + \frac{r''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

הפיתוח לעיל סופי כי $r^{(n+1)} \equiv 0$ כי r פולינום ממעלה לכל היותר n . מכאן ש- $r(x) = (x - x_0) \cdot \underbrace{r_1(x)}_{r_1(x) := r'(x_0) + \dots}$ ו- $r_1 \in \Pi_{n-1}$. ניתן להמשיך כך

להוציא את כל הגורמים עד ש- $r(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot r_n(x)$ ש- $r_n(x_n) = 0$ (זה החלק ב- $r(x)$ שמאפס את

הפולינום עבור x_n) אז בהכרח $r_n \equiv 0$ ולכן $r \equiv 0$. ■

<<< הוכחת קיום + יחידות (על הדרך) פולינום אינטרפולציה:

נשתמש בבסיס המונומים $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ למרחב Π_n . מחפשים $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ כך ש- $p(x_i) = f(x_i)$ לכל $i = 0, \dots, n$. ניצור מערכת משוואות:

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ \dots \\ p(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases} \xrightarrow{\text{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \rightarrow A \cdot \bar{a} = \bar{b}$$

מתקיים: $\det(A) = |A|_{\text{Vandermonde}} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i < j}}^n (x_i - x_j)$ וכיוון שכל x_j שונים זה מזה אז $|A| \neq 0$ ומכאן שקיים פתרון למערכת המשוואות ופתרון זה

הוא יחיד. ■

אינטרפולצית Lagrange:

בסיס Lagrange:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \in \Pi_n, \quad 0 \leq k \leq n$$

כל פולינום כזה הוא ממעלה לכל היותר n כי יש לכל היותר n גורמים (מדלגים על k). מתקיים: $l_k(x_j) = \delta_{j,k}$

הקבוצה $\{l_k\}_{k=0}^n$ היא בסיס: גודלה $n + 1$ ולכן מספיק להראות שאיבריה בת"ל. נניח $c_0l_0(x) + \dots + c_nl_n(x) = 0$ ונציב x_j לכל $j = 0, \dots, n$

$$0 = c_0 \cdot \underbrace{l_0(x_j)}_{=0} + \dots + c_j \cdot \underbrace{l_j(x_j)}_{=1} + \dots$$

פתרון אינטרפולציה עם פולינומי Lagrange:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot l_k(x)$$

כיוון שלכל $j = 0, \dots, n$ מתקיים: $p(x_j) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot l_k(x_j) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \cdot \delta_{j,k} = f(x_j)$

אינטרפולציית Newton:

נשתמש בבסיס: $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)\}$ - כל הוספת נקודה נוספת לא משנה את כל איברי הבסיס, בניגוד לאינטרפולציית Lagrange.

בהינתן פתרון עבור נקודות $x_0, \dots, x_k: p_k \in \Pi_k$ המקיים $p_k(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, k$ נמצא פתרון עבור נקודה נוספת x_{k+1} :
 $p_{k+1}(x_{k+1}) = p_k(x_{k+1}) + A \cdot \prod_{i=0}^k (x_{k+1} - x_i)$ כאשר A קבוע אותו מחלצים מתוך $p_{k+1}(x) = p_k(x) + A \cdot \prod_{i=0}^k (x - x_i)$
פתרון אינטרפולציה בבסיס ניוטון:

פתרון האינטרפולציה: $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k] \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$ כאשר $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ הוא הפרש מחולק מסדר k .

הפרשים מחולקים:

$$f[x_0] = f(x_0) \quad \bullet$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad \bullet$$

הערה: הסדר הפנימי בתוך ההפרש המחולק לא משנה.

<<< הוכחת נכונות אינטרפולציית Newton:

- נניח $p_{k-1}(x)$ פולינום הפותר את בעיית האינטרפולציה עבור נקודות x_0, \dots, x_{k-1} .
- נניח $q_{k-1}(x)$ פולינום הפותר את בעיית האינטרפולציה עבור נקודות x_1, \dots, x_k .
- נבנה $p_k(x)$ פולינום הפותר את הבעיה עבור כל הנקודות x_0, \dots, x_k : $p_k(x) := \frac{x-x_0}{x_k-x_0} \cdot q_{k-1}(x) + \frac{x_k-x}{x_k-x_0} \cdot p_{k-1}(x)$ מתקיים:
- $p_{k-1}(x_0) = 0 + 1 \cdot p_{k-1}(x_0) = f(x_0)$ מהגדרת p_{k-1}
- $p_k(x_k) = 1 \cdot q_{k-1}(x_k) + 0 = f(x_k)$ מהגדרת q_{k-1}
- $p_k(x_i) = \frac{x_i-x_0}{x_k-x_0} \cdot q_{k-1}(x_i) + \frac{x_k-x_i}{x_k-x_0} \cdot p_{k-1}(x_i) = \frac{x_i-x_0+x_k-x_i}{x_k-x_0} \cdot f(x_i) = 1 \cdot f(x_i) = f(x_i)$

■ נשים לב שמקדם החזקה הגבוהה הפולינום הוא ההפרש המחולק האחרון $f[x_0, \dots, x_k]$: $\frac{1}{x_k-x_0} f[x_1, \dots, x_k] + \frac{-1}{x_k-x_0} f[x_0, \dots, x_{k-1}]$
 הערה: הוכחה זו היא הוכחה באינדוקציה כאשר ההנחה ל- $k-1$ נותנת שני פולינומים שונים.

<<< משפט:

- אם $f: [a, b]$ בעלת k נגזרות רציפות ו- $x_i \neq x_j, x_0, \dots, x_k \in [a, b]$
- אז יש $\xi \in [a, b]$ כך ש- $f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$

הוכחה:

נגדיר $e_k(x) := f(x) - p_k(x)$ כאשר $p_k(x)$ פתרון אינטרפולציה בנקודות x_0, \dots, x_k . ב- $k+1$ הנקודות הללו מתקיים $e_k(x_i) = 0$, ומכאן של- $e'_k(x)$ יש k אפסים לפחות בקטע $[a, b]$ (לפי משפט שבין כל שני אפסים של f יש ל- f' אפס). ל- $e''_k(x)$ יהיו לפחות $k-1$ אפסים ב- $[a, b]$ וכך הלאה עד של- $e_k^{(k)}(x)$ יהיה לפחות אפס אחד בקטע $[a, b]$.

← קיים $\xi \in [a, b]$ כך ש- $e_k^{(k)}(\xi) = 0$. כיוון ש- $e_k^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - p_k^{(k)}(x)$ אז $f^{(k)}(\xi) - p_k^{(k)}(\xi) = 0$. נשים לב כי $p_k^{(k)}(c_i) = c_i \cdot k!$ הם מקדמי p_k ו- $c_k = f[x_0, \dots, x_k]$ כיוון שזה מקדם החזקה הגבוהה ביותר ב- $p_k(x)$.

$$\blacksquare f^{(k)}(\xi) - f[x_0, \dots, x_k] \cdot k! = 0 \Rightarrow f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

השגיאה באינטרפולציה:

נוסחת השגיאה:

$$f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

השגיאה בנקודה x לפולינום אינטרפולציה p_n בנקודות x_0, \dots, x_n היא:

<<< הוכחה לנוסחת השגיאה :

לפי בניית p_n מתקיים $f(x_i) = p_n(x_i)$ לכל $i = 0, \dots, n$, כלומר $e_n(x_i) = 0$. יהי $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, נבנה פולינום אינטרפולציה p_{n+1} ב-
 x_0, \dots, x_n, x : $p_{n+1}(z) = p_n(z) + f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \prod_{i=0}^n (z - x_i)$ - לפי בניית Newton. מהבניה מתקיים : $p_{n+1}(x) = f(x)$ ולכן :
 ■ $e_n(x) = f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ - כנדרש

מסקנה מנוסחת השגיאה והמשפט הקודם :

אם f בעלת $n + 1$ נגזרות רציפות : $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ כאשר ξ ברווח המכיל את x_0, \dots, x_k, x .

בד"כ לא ניקח את $f^{(n+1)}(\xi)$ אלא חסם עליון לנגזרת ה- $n + 1$ בקטע. נוסחת השגיאה מתאימה גם ל- x מחוץ לרווח האינטרפולציה.

מקרים מיוחדים של בחירת נקודות אינטרפולציה :

1. אינטרפולציה בנקודות שוות מרחק ב- $[a, b]$:

עבור $h = \frac{b-a}{2}, i = 0, \dots, n, x_i = a + ih$ - נקודות במרווחים קבועים באורך h החסם העליון לשגיאה :

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \cdot \frac{1}{4(n+1)} \cdot h^{n+1}$$

2. אינטרפולציה בנקודות Chebyshev :

נקודות האינטרפולציה יהיו שורשי פולינום Chebyshev. פולינום Chebyshev ממעלה n :

• נוסחה ישירה : $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$

• נוסחת נסיגה : $\begin{cases} T_0(x) = \cos(0) = 1 \\ T_1(x) = \cos(\arccos x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x) \end{cases}$ (נובעת מהזהות הטריגונומטרית : $\cos[(k+1)\theta] = 2 \cos \theta \cos k\theta - \cos[(k-1)\theta]$)

בקטע $[-1, 1]$ הפולינום חסום ע"י 1 (חסם ל- \cos). בגלל תחום ההגדרה של \arccos , כדי להשתמש בפולינום זה צריך העתקה $[a, b] \rightarrow [-1, 1]$:

• לקירוב $g(t), t \in [a, b]$ נגדיר : $x \in [-1, 1], f(x) := g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right)$ (הזזה וכיווץ לקטע $[-1, 1]$).

• בהינתן קירוב p_n ל- f , נעתיק חזרה ל- $[a, b]$: $g(t) \cong p_n\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{2}{a-b}t\right)$.

תכונות $T_n(x)$:

• נקודות האקסטרמום של $T_n(x)$ הם : $t_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), j = 0, \dots, n$

• ערכי הפולינום בנקודות האקסטרמום הם ± 1 לסירוגין : $|T_n(t_j)| = 1$

<<< משפט :

$$\max_{x \in [-1,1]} |x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| \geq \max_{x \in [-1,1]} |2^{-n+1} \cdot T_n(x)| = 2^{-n+1}$$

כלומר שורשי פולינום Chebyshev מביאים למינימום את $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$ עבור $x \in [-1, 1]$

הוכחה :

הביטוי $2^{-n+1} \cdot T_n(x)$ מקבל ערכי אקסטרמום $\pm 2^{-n+1}$ לסירוגין בקטע $[-1, 1]$ ב- $n + 1$ נקודות. נניח שקיים $q_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ המקיים : $\max_{x \in [-1,1]} |q_n(x)| \leq 2^{-n+1}$. כיוון ש- $q_n(x)$ חסום בין $\pm 2^{-n+1}$ הוא חותך את $2^{-n+1} \cdot T_n(x)$ בין כל שתי נקודות אקסטרמום סמוכות,

כלומר לפחות ב- n נקודות. בנקודות אלו ההפרש מתאפס : $r_n(x) = \frac{2^{-n+1} \cdot T_n(x)}{=x^n+\dots} - \frac{q_n(x)}{=x^n+\dots} \in \Pi_{n-1}$ (שני רכיבי ה- x^n מאפסים אחד את השני).

← כיוון ש- r_n הוא פולינום ממעלה $n - 1$ לכל היותר ומתאפס ב- n נקודות אזי $r_n \equiv 0$ ■

שגיאת האינטרפולציה בנקודות Chebyshev :

שגיאת האינטרפולציה ב- $n + 1$ שורשי $T_{n+1}(x)$ (פולינום ממעלה n) :

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max_{\eta \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(\eta)| \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} \leq \max_{\eta \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(\eta)| \frac{2^{-n}}{(n+1)!}$$

חסם זה נובע מבחירת x_i להיות $n + 1$ שורשי $T_{n+1}(x)$ כדי להביא למינימום את $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$

פתרון משוואות לא לינאריות:

משוואה לא לינארית: רוצים למצוא עבור f כלשהי שורש x , כלומר המקיים $f(x) = 0$.

שגיאה: עבור סדרת קירובים לשורש \bar{x} : $\{x_n\}$ נוסחת השגיאה היא: $e_n = x - x_n$.

סדר התכנסות: שיטה תהיה מסדר p אם מתקיים: $|e_{n+1}| \leq c \cdot |e_n|^p$

שיטת החציה:

עבור שתי נקודות a, b המקיימות $f(a) \cdot f(b) < 0$ (סימנים הפוכים), בודקים את $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ וממשיכים לחצי בו מכפלת ערכי הפונקציה עדיין שלילית.

סדר התכנסות: $|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |e_n|$ כיוון שבכל צעד מקטינים את הקטע פי שניים מהקודם. מכאן ש: $p = 1$.

שיטת המיתר:

בהינתן שתי נקודות x_{n-1}, x_n , מוצאים את x_{n+1} באופן הבא: מוצאים את הישר העובר ב- x_{n-1}, x_n (אינטרפולציה לינארית), ולוקחים את x_{n+1} להיות

חיתוכו עם ציר ה- x . הנוסחה:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1})$$

סדר התכנסות: $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

שיטת Newton:

בהינתן x_n מחשבים פיתוח טיילור מסדר ראשון סביבה – זו משוואת המשיק. x_{n+1} תהיה נקודת החיתוך שלו עם ציר ה- x . הנוסחה:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

סדר התכנסות: $p = 2$

אנליזה של התכנסות לנקודת שבת של הפונקציה g של שיטה איטרטיבית מהצורה $x_{n+1} = g(x_n)$

משפט נקודת השבת:

תהי g המקיימת עבור $I = [a, b]$:

$$1. \quad g(I) \subseteq I$$

$$2. \quad g \in C[a, b]$$

$$3. \quad g \text{ גזירה ב-} [a, b] \text{ ו-} |g'(x)| \leq k < 1 \text{ לכל } x \in [a, b].$$

אז האיטרציות $x_{n+1} = g(x_n)$ מתכנסות לכל תנאי התחלה $x_0 \in [a, b]$ לנקודת שבת יחידה ב- $[a, b]$.

הוכחה:

קיום: תהי $g: [a, b] \rightarrow [a, b]$, אז $g(a) \geq a, g(b) \leq b$ ומכאן עבור $h(x) := g(x) - x$ מתקיים: $h(a) \geq 0, h(b) \leq 0$.

כיוון ש- h סכום שתי פונקציות רציפות, היא רציפה ב- $[a, b]$, ולכן קיימת $\xi \in [a, b]$ כך ש- $h(\xi) = 0$, ומכאן ש- $g(\xi) = \xi$ - קיימת נקודת שבת.

יחידות: נניח כי $g(\eta) = \eta$ (נקודת שבת נוספת), אז: $g(\eta) - g(\xi) = \eta - \xi$ משפט ערך הביניים לנגזרת

$$(a = k\eta, k < 1 \Rightarrow a = 0 \text{ כי } |\eta - \xi| = |g'(\tau)(\eta - \xi)| \leq k \cdot |\eta - \xi| \xrightarrow{k < 1} |\eta - \xi| = 0 \Rightarrow \eta = \xi \Leftarrow$$

הוכחת התכנסות: תהי \bar{x} נקודת השבת היחידה ב- $[a, b]$. נבדוק התכנסות:

$$n + 1 \text{ שגיאה באיטרציה ה-} = e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = g(x_n) - \bar{x} \stackrel{\bar{x}=g(\bar{x})}{=} g(x_n) - g(\bar{x}) \stackrel{\text{משפט ערך הביניים לנגזרת}}{=} g'(\tau)(x_n - \bar{x}) = g'(\tau) \cdot e_n$$

$$\Rightarrow |e_{n+1}| \leq k \cdot |e_n|, 0 \leq k < 1 \Rightarrow |e_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \blacksquare$$

מציאת תחום התכנסות: מוצאים את התחום בו:

$$\bullet \quad |g'(x)| < 1$$

$$\bullet \quad g[a, b] \subseteq [a, b]$$

<<< טענת קיום סביבת התכנסות:

אם g גזירה ברציפות בקטע פתוח סביב נקודת שבת \bar{x} שלה ו- $|g'(\bar{x})| < 1$ אז קיימת סביבה: $I = [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon]$ כך ש- $x_{n+1} = g(x_n)$ מתכנס לכל תנאי התחלה $x_0 \in I$.

הוכחה:

בגלל ש- g' רציפה קיימת סביבה של \bar{x} כך ש- $|g'(x)| \leq k < 1$ לכל $x \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon]$ (הסביבה). עבור η ברווח בין x ל- \bar{x} (תלוי מי גדול יותר):
 $g(x) - \bar{x} = g(x) - g(\bar{x}) \stackrel{\text{מ"ש}}{=} g'(\eta)(x - \bar{x}) \Rightarrow |g(x) - \bar{x}| \leq k \cdot |x - \bar{x}|, x \in [\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon]$

לכן ברווח זה מתקיימים תנאי המשפט (כולל הכלה של תמונת g ברווח), ולכן מכל $x_0 \in I$ יש התכנסות. ■

<<< הוכחת סדר התכנסות $p = 2$ לשיטת Newton:

טענה: אם \bar{x} שורש של f ו- $f'(\bar{x}) \neq 0$ אז g איטרצית ניוטון מקיימת: $|g'(\bar{x})| < 1$ ויש סביבה של \bar{x} בה איטרצית ניוטון מתכנסת.

טענה: אם $g'(\bar{x}) = 0$ אז סדר שיטת ניוטון הוא 2: $|e_{n+1}| \leq c \cdot |e_n|^2$

הוכחה: נניח כי g'' רציפה בסביבת \bar{x} ונפתח את $g(x_n)$ בטור סביב \bar{x} :

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = g(x_n) - g(\bar{x}) = \underbrace{g(\bar{x}) + g'(\bar{x}) \cdot (x_n - \bar{x}) + \frac{g''(\eta)}{2} (x_n - \bar{x})^2 - g(\bar{x})}_{\text{Taylor}} = \frac{g''(\eta)}{2} (x_n - \bar{x})^2 = \frac{g''(\eta)}{2} e_n^2$$

■ $|e_{n+1}| \leq c \cdot |e_n|^2$ ולכן מתקיים $[\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon]$ חסומה בסביבה

אינטרפולציה לפונקציה ונגזרותיה – אינטרפולצית Hermite:

נתונות נקודות $\{t_i\}_{i=1}^k$ עם ערכים $f^{(j)}(t_i)$, $j = 0, \dots, m_i - 1$ (סה"כ m_i ערכים לכל t_i).

משפט אינטרפולציה לפונקציה ונגזרותיה (לא צריך ללמוד הוכחה):

קיים פולינום יחיד p_n ממעלה $n = \sum_{i=1}^k m_i - 1$ המקיים $p_n^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i)$ עבור $j = 0, \dots, m_i - 1, 1 \leq i \leq k$

כאשר $p_n(x) = \sum_{j=0}^n f[x_0, \dots, x_j] \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$

$t_1 = x_0 = x_1 = \dots = x_{m_1-1}, t_2 = x_{m_1} = x_{m_1+1} = \dots = x_{m_1+m_2-1}, \dots$

השגיאה: $f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \prod_{j=0}^n (x - x_j)$

לכל נקודה מצמידים מספר x_i בהתאם לריבוי שלה – כלומר בהתאם ל- m_i שלה: לכל ה- x_i יהיו $x_{m_i-1}, \dots, x_{m_i-1}$.

הפרשים מחולקים במקרה הכללי:

כאשר מתאפשרות נקודות עם ריבוי, ואם נניח כי $x_i \leq x_{i+1}$:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = x_1 = \dots = x_k \\ \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & \text{אחרת} \end{cases}$$

מערכת משוואות לינאריות:

נורמות של מטריצות וקטורים:

תכונות נורמות:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \|x\| \geq 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ עבור סקלר α .
- אשמייש: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- נורמות וקטוריים: יהי x וקטור מממד n

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

- $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

- נורמת מקסימום (אינסוף): $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

נורמות מטריצות:

עבור $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$ ולכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים: $\|A\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

• $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

• אשמ"ש: $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

כל נורמה p של וקטורים משרה נורמה p של מטריצות.

• נורמה 1 של מטריצה היא מקסימום סכום ע"מ בעמודות. $\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\}$

הגדרת נורמת מקסימום למטריצות:

עבור $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ מתקיים: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\}$ - נורמת מקסימום של מטריצה היא מקסימום סכום ע"מ בשורות.

הוכחה:

נסמן $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j$. נחסום מלמעלה:

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\| \neq 0} \left\{ \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |(Ax)_i|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|} \right\} \stackrel{(*)}{\leq} \max_{\|x\| \neq 0} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|} \right\} =$$

$$\max_{\|x\| \neq 0} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \stackrel{(*)}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \quad (*) \quad |(Ax)_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \cdot \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

כדי להוכיח שוויון מספיק להראות שוויון עבור וקטור יחיד x כך ש: $\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|\}$

קיימת ב-A שורה \bar{i} כך ש: $\sum_{j=1}^n |a_{\bar{i}j}| \geq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \forall i$. נגדיר את x כך ש- $x_j := \text{sign}(a_{\bar{i}j})$ (וקטור של $\pm 1, 0$).

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{\bar{i}j} \cdot \underset{=\text{sign}(a_{\bar{i}j})}{x_j} \right| = \sum_{j=1}^n |a_{\bar{i}j}| \Rightarrow$$

מכאן שעבור ה- x שבחרנו מתקיים: $\|A\|_\infty = \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty=1} = \|Ax\|_\infty \geq \sum_{j=1}^n |a_{\bar{i}j}| \geq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

← הראנו את אותו חסם משני הצדדים ולכן מתקיים: $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

הערכת שגיאה:

נניח נתון פתרון מקורב \bar{x} למערכת $Ax = b$, והשגיאה היא $e = x - \bar{x}$. ניתן להציב כדי לבדוק קירוב: $r := b - A\bar{x}$

• $\|r\| \leq \|A\| \cdot \|e\|$: ומכאן $r = b - A\bar{x} = Ax - A\bar{x} = A(x - \bar{x}) = Ae$

• $\|e\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$: ומכאן $e = A^{-1}r$

← מהשניים הנ"ל נובע: $\frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|e\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|r\|$

• $\|b\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$: ומכאן $b = Ax$

• $\|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$: ומכאן $x = A^{-1}b$

← מהשניים הנ"ל נובע: $\frac{\|b\|}{\|A\|} \leq \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b\|$

לסיכום: $\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$ - ה-condition number חסם למספר הספרות שעלולים

לאבד בדיוק פתרון משוואה לינארית.

שיטות איטרטיביות לפתרון מערכת משוואות לינאריות מהצורה $Ax = b$:

בהינתן מערכת $Ax = b$ נעביר לצורה $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$ כאשר האינדקס העליון הוא אינדקס האיטרציה, וזה נראה כמו משהו עם נקודת שבת.

בצורה מטריציונית: $B = I - GA, c = Gb$, נרצה למצוא G הפיכה (סינגולרית) כזו כך ש: $x = (I - GA)x + Gb$

שיטת Jacobi:

כאשר האלכסון שונה מאפס, מבודדים אותו:

$$Ax = b \Rightarrow 1 \leq i \leq n: \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \Rightarrow a_{ii}x_i = -\sum_{j \neq i}^n a_{ij}x_j + b_i \Rightarrow x_i^{(n+1)} = -\sum_{j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(n)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

בצורה מטריציונית:

נסמן D את מטריצת האלכסון של A, L מטריצת האיברים שתחת האלכסון ו-U מטריצת האיברים מעל האלכסון: $A = L + D + U$

$$Dx = -(L + U)x + b \Rightarrow x = D^{-1}(-L - U)x + D^{-1}b \quad \text{כאן } G = D^{-1}(-L - U)$$

<<< משפט:

אם $\|B\| < 1$ אז התהליך האיטרטיבי $x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$ מתכנסת לפתרון יחיד של $x = Bx + c$ מכל וקטור התחלתי $x^{(0)}$ (נכון לכל נורמה).

הוכחה:

כדי להראות קיום ויחידות ל- $x = Bx + c$ מספיק להראות של- $x = Bx$ יש רק פתרון טריויאלי. נניח ש- $x = Bx$ אז:

$$\|x\| = \|Bx\| \leq \|B\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| < \|x\| \Rightarrow \|x\| = 0$$

■ $x = Bx + c$ הוא וקטור ה-0 ומכאן שיש פתרון טריויאלי בלבד למשוואה ההומוגנית ולכן יש פתרון יחיד למשוואה הלא הומוגנית $x = Bx + c$.

השגיאה:

ביטוי לשגיאה: $e^{(n+1)} = x - x^{(n+1)}$ והוא מתכנס ל-0 כש- $n \rightarrow \infty$ מכל תנאי התחלה $x^{(0)}$ כיוון שמקיים: $e^{(n+1)} = B e^{(n)}$ והרי $\|B\| < 1$.

$$\frac{\|B^n x\|}{\|x\|} \leq \|B^n\| \leq \|B\|^n \quad \text{אם } x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ אז } e^{(0)} = x \text{ ואז השגיאה היחסית באיטרציה ה-} n \text{ היא } \|B^n\|$$

חזרה לשיטת Jacobi:

<<< טענת תנאי התכנסות לשיטת Jacobi:

שיטת Jacobi מתכנסת אם A בעלת אלכסון דומיננטי, כלומר ע"מ איברי האלכסון גדולים מסכום שאר ע"מ של איברי השורה: $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$.

הוכחה:

$$\Leftrightarrow \sum_{j \neq i}^n |b_{ij}| = \sum_{j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \sum_{j \neq i}^n \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1, \quad 1 \leq i \leq n: B = (b_{ij})$$

■ $\|B\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{\sum_{j=1}^n |b_{ij}|\} < 1$ השיטה מתכנסת ובפרט יש פתרון יחיד

טענת התכנסות נוספת לשיטת Jacobi (מהתרגול): $\rho(B) < 1$ כאשר $\rho(B) = \max_{\lambda \in \text{Eigenvalues}(B)} |\lambda|$.

שיטת Gauss-Seidel:

$$x_i^{(n+1)} = -\sum_{j < i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n+1)} - \sum_{j > i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(n)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$$

שיטה זו מתכנסת מהר יותר משיטת Jacobi אם:

- בעלת אלכסון דומיננטי.
- A טרידיאגונלית (רק באלכסון הראשי, באלכסון שתחתיו ובאלכסון שמעליו איברים שונים מ-0).
- ל-A איברים חיוביים באלכסון ואי חיוביים מחוצה לו.

$$x = -(L + D)^{-1}Ux + (L + D)^{-1}c \quad \text{כאן } G = (L + D)^{-1}(-L - U)$$

משפט המעגל של Gershgorin (לאיתור ע"ע):

לכל ע"ע λ של מטריצה A קיים אינדקס i עבורו: $|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$ - כלומר λ יושב בתוך מעגל שמרכזו איבר מהאלכסון של A ורדיוסו הוא סכום הע"מ של שאר איברי השורה.

<<< שיטת החזקה למציאת ע"ע: השיטה: $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^t A)}$

הוכחה:

נניח ל- A נתונים מערכת של עי"ע λ_i ווי"ע v_i מתאימים כך שמתקיים: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_3|$. עבור כל עי"ע ווי"ע מתקיים: $Av_i = \lambda_i v_i$. יהי $z = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ וקטור כלשהו:

$$A^m z = \sum_{i=1}^n a_i A^m v_i = \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^m v_i \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^m} A^m z = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v_i \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_1 v_1 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_1^{m+1}} A^{m+1} z \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_1 a_1 v_1)_j}{(a_1 v_1)_j} = \lambda_1 \quad \blacksquare$$

(רכיב j הוא זה בעל עי"ע מקסימלי).

שיטת מטריצה Q (?) :

$$x = Bx + c \Rightarrow x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c = B(Bx^{(n-1)} + c) + c = \dots = c + Bc + B^2c + \dots + B^n c = P_n(B) \cdot c$$

נחפש $P_n(x)$ אחר כך ש- $P_n(B)c = x^{(n+1)}$ יהיה קירוב טוב יותר לפתרון x . נגדיר שארית:

$$r^{(n+1)} = c - (x^{(n+1)} - Bx^{(n+1)}) = c - (P_n(B)c - BP_n(B)c) = ((B - I)P_n(B) + I)c = Q_{n+1}(B)c \quad \boxed{Q_{n+1}(x) = (x - 1)P_n(x) + 1}$$

$$(Q_{n+1}(1) = 1 \text{ נשים לב ש-}) \quad \boxed{P_n(x) = \frac{Q_{n+1}(x) - 1}{x - 1}} : Q_{n+1}(x) \text{ מתוך } P_n(x)$$

נניח ל- B מערכת עי"ע שלמה: $Bv_i = \lambda_i v_i$, נפתח את $c = \sum_{i=1}^n a_i v_i$: $Bv_i = \lambda_i v_i$, מכאן שכדי לקבל שארית קטנה צריך ש- Q_{n+1} תקבל ערכים קטנים על העי"ע של B (הספקטרום של B).

נניח ש- $\lambda_i \in [a, b]$ עבור העי"ע של B , ו- $1 \notin [a, b]$: אז $\boxed{Q_{n+1}(x) = T_{n+1}\left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}$ הוא הפולינום בעל נורמת המקסימום ב- $[a, b]$ ומקיים

$$Q_{n+1}(1) = 1 - T_{n+1}(\text{פולינום Chebyshev}).$$

קירוב נגזרות של פונקציה:

שיטה ראשונה:

נתונה הפונקציה f בנקודות x_0, \dots, x_k ורוצים לקרב את $f'(x)$.

- מוצאים את $p_k(x)$ פולינום האינטרפולציה ב- x_0, \dots, x_k וידוע מנוסחת השיגאה: $f(x) = p_k(x) + f[x_0, \dots, x_k, x] \cdot \prod_{i=0}^k (x - x_i)$
- נסמן $\psi_k(x) := \prod_{i=0}^k (x - x_i)$, ומגזירת שני האגפים מקבלים קירוב לנגזרת:

$$\boxed{f'(x) = p'_k(x) + E(x), \quad E(x) = \frac{f^{(k+2)}(\xi_x)}{(k+2)!} \cdot \psi_k(x) + \frac{f^{(k+1)}(\eta_x)}{(k+1)!} \cdot \psi'_k(x)}$$

מציאת קירוב לנגזרת שניה:

$$\boxed{f''(x) = p''_k(x) + \psi_k(x) \cdot f[x_0, \dots, x_k, x, x] + 2\psi'_k(x) f[x_0, \dots, x_k, x, x] + \psi''_k(x) f[x_0, \dots, x_k, x]}$$

שיטה שניה:

נמצא קירוב לנגזרת עי"ע שימוש ב- $f(a), f(a+h), f(a+2h)$:

$$\text{Taylor} \begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\tau_1) / \cdot 4 \\ f(a+2h) = f(a) + 2hf'(a) + \frac{4h^2}{2} f''(a) + \frac{8h^3}{6} f^{(3)}(\tau_2) / \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \text{מחברים משוואות ומקבלים} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(a) = \frac{-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)}{2h} - \frac{1}{3} f^{(3)}(\eta) h^2}$$

כאשר לפי משפט ערך הביניים החלפנו את $\frac{1}{3} f^{(3)}(\eta)$ ב- $\frac{1}{3} f^{(3)}(\tau_1) - \frac{2}{3} f^{(3)}(\tau_2)$

קירוב לנגזרת שניה עי"ע שימוש ב- $f(a-h), f(a), f(a+h)$:

$$\text{Taylor} \begin{cases} f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\tau_1) \\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\tau_2) \end{cases} \Rightarrow \text{שוב מחברים משוואות ומקבלים} \Rightarrow$$

$$f''(a) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\eta)$$

כאשר η מתקבל שוב לפי משפט ערך הביניים.

אינטגרציה נומרית ופולינומים אורתוגונליים:

בעית אינטגרציה נומרית: למצוא קירוב $I(f) := \int_a^b f(x) dx$ על סמך ערכי f ב- x_0, \dots, x_k : $\{f(x_i)\}_{i=1}^n$.

אם נשתמש בפולינום Lagrange: $p_k(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) l_i(x)$, מתקיים: $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^k f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx$ ועבור $w_i := \int_a^b l_i(x) dx$

כאשר w_i משקלות לא תלויות בערכי הפונקציה אלא רק בפיזור הנקודות x_0, \dots, x_k . $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^k w_i \cdot f(x_i)$

$$E(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_k, x] \cdot \underbrace{\prod_{i=0}^k (x - x_i)}_{=\psi_k(x)} dx$$

מקרים בהם ניתן לפשט את ביטוי השגיאה:

$$1. \text{ אם } \psi_k(x) \text{ לא משנה סימן ב-} [a, b]: E(f) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \int_a^b \psi_k(x) dx, \quad \xi \in [a, b]$$

פשוט מוציאים את ההפרש המחולק מחוץ לאינטגרל. נובע ממשפט ערך הביניים לאינטגרלים: אם $h(x) \geq 0, g \in C[a, b]$ אז:

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = g(\eta) \int_a^b h(x) dx \quad \text{ומתקיים: } f[x_0, \dots, x_k, x] \in C[a, b] \text{ אם } f \in C^{k+1}[a, b]$$

הערה: במקרה זה אם $f \in \Pi_k$ אז $E(f) = 0$.

$$2. \text{ אם } \int_a^b \psi_k(x) dx = 0: E(f) = \int_a^b f[x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, x] \psi_{k+1}(x) dx$$

הערה: במקרה זה אם $f \in \Pi_{k+1}$ אז $E(f) = 0$.

בניית נוסחת אינטגרציה מורכבת המבוססת על שיטת נקודת האמצע:

שיטת נקודת האמצע:

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta)}{24} (b-a)^3$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h\right) + \frac{b-a}{24} f''(\eta) h^2$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - f''(\eta) \frac{(b-a)^3}{12}$$

שיטת Simpson:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{f^{(4)}(\eta)}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5$$

$$E(f) = -\frac{1}{90} \left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta)$$

שיטת טרפז מתוקנת:

עבור $k=3$ שימוש ב- $(b, f(b), x_3 = f(b), x_2 = f(a), x_1 = f(a), x_0 = f(a))$ ערכי f ו- f' ב- a, b :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} (f(a) + f(b)) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} f(ih) + \frac{h^2}{12} [f'(a) - f'(b)] + E(f)$$

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{720} h^2 (b-a)$$

נוסחת Simpson מורכבת:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \left[f(a) + 4f\left(a + \frac{h}{2}\right) + 2f(a+h) + 4f\left(a + \frac{3h}{2}\right) + 2f(a+2h) + \dots + f(b) \right] + E(f)$$

$$E(f) = \sum_{i=0}^{N-1} -\frac{1}{90} h^5 \cdot f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{f^{(4)}(\eta) h^5}{90 \cdot 32} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} 1 = -\frac{(b-a)h^4}{2880} : \text{השגיאה בנוסחת סימפסון המורכבת}$$

הערה: עבור פונקציות מחזוריות השיטה הטובה ביותר היא לקחת מרווחים שווים ולהשתמש בשיטת הטרפז.

מכפלה פנימית עם משקל $w(x)$:

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx : f, g \in C[a, b] \text{ עבור פונקציות } w(x) > 0, x \in [a, b] \text{ עם משקל } w(x)$$

$$\|f\|_w = \sqrt{\langle f, f \rangle_w} > 0 \Leftrightarrow f \neq 0$$

פולינומים אורתוגונליים ביחס ל- $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$:

תהי $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ מערכת פולינומים אורתוגונליים ביחס ל- $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ המקיימת $\langle p_m, p_n \rangle_w = h_m \cdot \delta_{m,n}$ ונניח כי יודעים את המומנטום של w :

$$m_j = \int_a^b x^j w(x) dx, \text{ נגדיר את הפולינום:}$$

$$p_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix} \in \Pi_n$$

טענה <<<

לכל $0 \leq j \leq n-1$ מתקיים $\langle p_n, x^j \rangle_w = 0$, כלומר המערכת $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ היא מערכת אורתוגונלית.

הוכחה:

$$\langle p_n, x^j \rangle_w = \int_a^b \begin{vmatrix} 1 & \dots & x^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix} x^j w(x) dx = \begin{vmatrix} \int_a^b x^j w(x) dx & \dots & \int_a^b x^{j+n} w(x) dx \\ m_0 & \dots & m_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

■ וזה בגלל שהשורה הראשונה שווה לשורה ה- $j+1$

קירוב אינטגרלים מהצורה $\int_a^b w(x) f(x) dx$:

$$E = \int_a^b f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \cdot \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)}{c \cdot P_n(x)} w(x) dx : \text{נקרב את } f(x) \text{ בעזרת פולינום אינטרפולציה } q_{n-1}(x) \text{ מעל } x_0, \dots, x_{n-1} \text{ ונקבל שגיאה}$$

נרצה לבחור נקודות אינטרפולציה x_0, \dots, x_{n-1} כך שהשגיאה תהיה 0 עבור $f \in \Pi_{2n-1}$.

טענה <<<

אם $f \in \Pi_k$ אז $f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n}$

$$\text{הוכחה: } f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n} : \text{אם } k \geq n : f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n} \Rightarrow \frac{f(x)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)} \in \Pi_k$$

טענה <<<

אם נבחר את x_0, \dots, x_{n-1} להיות שורשי P_n מתוך מערכת הפולינומים האורתוגונליים ביחס ל- $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ אז $E = 0$ לכל $f \in \Pi_{2n-1}$.

הוכחה:

ברור כי עבור $f \in \Pi_{n-1}$ מתקיים $E = 0$. אם $k > n-1$ אז $f \in \Pi_k$ ונקבל $f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n}$.

$$\text{■ } E = 0 \text{ ולכן } f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n} \text{ אורתוגונלי ל-} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)}{c \cdot P_n(x)} \text{ ולכן } n-1 < k \leq 2n-1 \Rightarrow \boxed{0 \leq k-n \leq n-1}$$

טענה <<<

אם p_n (הפולינום האורתוגונלי מהמערכת $\{p_n\}$) אורתוגונלי ל- $x^{n-1}, \dots, 1$ אז כל שורשיו הפשוטים הם בקטע (a, b) .

הוכחה:

נניח כי מספר השורשים של p_n בקטע קטן מ- n , ונסמן את שורשיו: t_1, \dots, t_m . כאשר $m < n$. בנקודות אלו p_n משנה סימן.

נגדיר: $q_m(x) = \prod_{i=1}^m (x - t_i)$ ואז $p_n(x) \cdot q_m(x)$ לא משנה סימן ב- (a, b) ולכן $\int_a^b p_n(x) q_m(x) w(x) dx \neq 0$ כי p, q משנים סימן יחד בכל

הנקודות t_i - סתירה לכך ש- p_n אורתוגונלי לכל הפולינומים ממעלה $> n$ משנה סימן n פעמים ב- (a, b) ולכן יש לו n שורשים פשוטים בקטע. ■

<<< פיתוח נוסחת השגיאה באינטגרציה של גאוס :

עבור $\int_a^b w(x)f(x)dx$ כאשר מבצעים אינטרפולציה על f לפי שורשי הפולינום האורתוגונלי p_n (מעל x_0, \dots, x_{n-1}), נוסחת השגיאה היא :

$$E = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{h_n^2}{\alpha_n^2} \quad \text{כאשר } h_n = \int_a^b (p_n(x))^2 w(x)dx$$

הוכחה :

נפתח את נוסחת השגיאה: $\int_a^b f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \cdot \psi_{n-1}(x)w(x)dx$ כאשר $\psi_{n-1}(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$. נשים לב שמתקיים :

$$\begin{aligned} f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] &= f[x_0, \dots, x_n] + f[x_0, \dots, x_n, x](x - x_n) \\ \int_a^b \psi_{n-1}(x)w(x)dx &= 0 \quad \text{ולכן } \psi_{n-1}(x) = c \cdot p_n(x) \end{aligned}$$

ומכאן: $E = \int_a^b f[x_0, \dots, x_n, x]\psi_{n-1}(x)(x - x_n)w(x)dx$. נמשיך בתהליך עד הוספת n נקודות: x_n, \dots, x_{2n-1} , ונבחר את הנקודות האלו לקיים

$x_{n+j} = x_j, 0 \leq j \leq n-1$ ונקבל: $E = \int_a^b f[x_0, \dots, x_{2n-1}, x] \underbrace{\psi_{n-1}^2(x)}_{\substack{\text{לא משנה} \\ \text{סימן בקטע}}} w(x)dx$ וכיוון שרכיב זה לא משנה סימן בקטע:

$$E = f[x_0, \dots, x_{2n-1}, \xi] \int_a^b \psi_{n-1}^2(x)w(x)dx = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \int_a^b (c \cdot p_n(x))^2 w(x)dx$$

כאשר α_n הוא המקדם המוביל של p_n מתקיים: $x = \frac{1}{\alpha_n}$ ולכן $E = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{h_n^2}{\alpha_n^2}$. כנדרש. ■

ספליינים – Splines

בעית אינטרפולציה עם תנודות מינימליות :

נתונות נקודות $a = x_0 \leq \dots \leq x_n = b$ וערכים מתאימים f_i . נמצא $u(x)$, $domain(u) = [a, b]$ כך ש:

$$\begin{aligned} I(u) &:= \int_a^b (u^{(m)}(x))^2 dx \quad \text{מינימלי. } I - \text{פונקציונאל (פונקציה המוגדרת על פונקציות).} \\ u(x_i) &= f_i, i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

עבור $m = 1$:

נחפש u שמקיימת:

$$(1) \quad \text{יש לה שתי נגזרות רציפות בכל קטע } [x_i, x_{i+1}]$$

$$(2) \quad u(x_i) = f_i \quad \text{לכל } i = 0, \dots, n$$

$$(3) \quad \text{נותנת ערך מינימלי ל-} \int_a^b (u'(x))^2 dx$$

עבור g בעלת שתי נגזרות רציפות בכל $[x_i, x_{i+1}]$ המקיימת $g(x_i) = 0$ לכל $i = 0, \dots, n$ ו- u כמוגדרת לעיל מתקיים:

$$I(u + g) \geq I(u)$$

$$(u + g)(x_i) = f_i$$

הגדרה: $F(t) = I(u + tg) \geq I(u), \forall t \in \mathbb{R}$ - ל- $F(t)$ מינימום ב- $t = 0$. מתקיים מהגדרה: $F(t) = \int_a^b (u'(x) + tg'(x))^2 dx$.

אפיון u : אורתוגונלית ל- g' לכל g המקיימת $g(x_i) = 0$ וחלקה מספיק, כלומר מתקיים: $\int_a^b u'(x)g'(x)dx = 0$ לכל g כמוגדר קודם.

<<< טענה :

מאפיון u נובע כי בכל רווח (x_{i-1}, x_i) עבור $i = 1, \dots, n$ מתקיים: $u''(x) \equiv 0$.

הוכחה :

נניח כי $u''(x) \neq 0$ ב- (x_{i-1}, x_i) , אז יש סביבה $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon) \subset (x_{i-1}, x_i)$ בה $u''(x)$ לא משנה סימן.

נבחר $g \neq 0$ המוגדרת מעל $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ ומקבלת אותו סימן כמו u'' ונקבל $\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''(x)g(x)dx > 0$ - סתירה.

■ $u'' \equiv 0$ בכל (x_{i-1}, x_i) ולכן u לינארית למקוטעין

עבור $m = 2$:

נחפש u שמקיימת :

$$u^{(4)} \in C[x_{i-1}, x_i] \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

$$u(x_i) = f_i \quad i = 0, \dots, n \quad (2)$$

$$I(u) = \int_a^b (u''(x))^2 dx \quad (3)$$

גם כאן נעשה וריאציה על u שפותרת את הבעיה ע"י הוספת tg עבור g חלקה מספיק: $F(t) = \int_a^b (u''(x) + tg''(x))^2 dx \geq F(0), \forall t \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b u''(x)g''(x)dx = 0$$

$$0 = \int_a^b u''(x)g''(x)dx = \dots = \sum_{i=0}^n \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} u^{(4)}(x)g(x)dx - u'''g|_{x_{i-1}}^{x_i} + u''(x_i^-)g'(x_i^-) - u''(x_{i-1}^+)g'(x_{i-1}^+) \right]$$

כאשר x^- הוא גבול משמאל ו- x^+ הוא גבול מימין – וזה כיוון שלא ידוע ש- u גזירה בקצוות.

טענה <<< :

$$u''(a) = u''(b) = 0$$

הוכחה :

נבחר g כך ש- $g(x_i) = 0$ ו- $g'(x_i) = 0$ לכל $i = 0, \dots, n$ וכמו קודם $g \neq 0$ רק באותו רווח שבו $u^{(4)}(x)$ לא משנה סימן.

תחילה נוכיח כי $u^{(4)}(x) = 0$ לכל $x \in (x_{i-1}, x_i)$ אם לא כך, אז קיים \bar{x} ברווח כך ש- $u^{(4)}(\bar{x}) \neq 0$ ולכן קיימת סביבה $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ בה $u^{(4)}$ לא משנה סימן, ונבחר g בעלת אותו סימן בסביבה זו ו- 0 מחוץ לה. כמו קודם נקבל שתירה לכך ששכום האינטגרלים שווה ל- 0 .

כעת נשארונו עם: $0 = \sum_{i=0}^n [u''(x_i^-)g'(x_i^-) - u''(x_{i-1}^+)g'(x_{i-1}^+)]$ כד: $g \in C^1[a, b]$ לכל $i = 0, \dots, n$ ו- $g(x_i) = 0$ ו- $g'(x_i) = 0$.

$$g'(x_j) = 0 \quad \forall j \neq i \quad \text{כך מהשכום לעיל ישאר: } \underbrace{u''(x_i^-)g'(x_i^-)}_{=1} - \underbrace{u''(x_{i-1}^+)g'(x_{i-1}^+)}_{=1} = 0$$

עבור $i = 0$: $g'(a) = 1$ ולכן $u''(a^+) = 0$ ומכאן: $u''(a) = 0$. באופן דומה $u''(b) = 0$. מכאן שכל התנאים שרצינו מתקיימים. ■

הפתרון ל- $m = 2$ הוא spline ממעלה 3 - פולינום ממעלה ≥ 3 על כל $[x_{i-1}, x_i]$ עבור $i = 1, \dots, n$ כשבחיבורים נגזרת שניה רציפה (cubic spline).

המקרה הכללי – פונקצית spline ממעלה k :

תהי $u \in S_k$ פונקצית spline ממעלה k עם צמתים x_0, \dots, x_n . u היא פולינום למקוטעין ממעלה k מעל כל $[x_{i-1}, x_i]$, כלומר:

$$u|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \Pi_k|_{[x_{i-1}, x_i]} \quad \text{עם חיבורים רציפים מסדר } k-1 \text{ בצמתים: } u^{(j)}(x_i^+) = u^{(j)}(x_i^-), \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

במקרה של $m = 2$ (cubic spline) הדרישה $u''(a) = u''(b) = 0$ נובעת ממזעור $I(u)$, ואלה הם תנאי שפה טבעיים.

מקדמים חופשיים :

לכל קטע מ- n הקטעים פולינום ממעלה $k \geq k$, לו יש $k+1$ פרמטרים בכל צומת x_1, \dots, x_{n-1} ($n-1$ צמתים פנימיים) יש k תנאים של רציפות הנגזרות.

$$\begin{aligned} \text{סה"כ: מקדמים חופשיים } n+k &\Rightarrow \text{פרמטרים } -nk + n \\ \text{תנאים } (n-1)k = nk - k & \end{aligned}$$

$$(x)_+^k := \begin{cases} x^k, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{הגדרה: פונקצית החזקה הקטועה}$$

$$\dim(S_k) = n+k$$

$$p_1(x) = \sum_{j=0}^k c_j x^j + \underbrace{d_1(x-x_1)_+^k}_{\in S_k} + \dots + \{1, x, \dots, x^k\}$$

בסיס ל- S_k יהיה: $\{1, x, \dots, x^k\} \cup \{(x-x_i)_+^k\}_{i=1}^{n-1}$ - מספר האיברים בבסיס הוא: $(k+1) + (n-1) = k+n$, כנדרש.

B-splines

S_k הוא מרחב הספליינים ממעלה k על צמתים x_0, \dots, x_n ועל כל $[x_{i-1}, x_i]$ $s \in S_k$ הוא פולינום ממעלה $\geq k$ ו- $s \in C^{n-1}[x_0, x_1]$

$$n+k \text{ בסיס החזקות הקטועות ל-} S_k: \{1, x, x^2, \dots, x^k\} \cup \{(x-x_i)_+^k\}_{i=1}^{n-1} \text{ ומימד המרחב הוא } n+k$$

ספליין טבעי ממעלה 3 פותר את בעיית האינטרפולציה ב- x_0, \dots, x_n ומינימיזציה של $\int_{x_0=a}^{x_n=b} (u''(x))^2 dx$ כאשר $u \in S_3, u''(a) = u''(b) = 0$

B-Splines

בסיס B-Splines ל- S_k

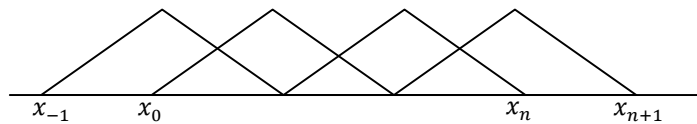
הגדרה: $B_i^{(k)}(x) := (\cdot - x)_+^k [x_{i-m_1}, x_{i-m_1+1}, \dots, x_{i+m_2}] (x_{i+m_2} - x_{i-m_1})$ (האיבר הראשון הוא הפרש מחולק של הפוני $(\cdot - x)_+^k$).

- אם $m_1 = m, m_2 = m + 1 : k = 2m$
 - אם $m_1 = m_2 = m : k = 2m - 1$
- כאשר $(\cdot - x)_+^k (y) = (y - x)_+^k$
- $S_1 - k = 1$**

$$B_i^{(1)}(x) = (\cdot - x)_+^1 [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] (x_{i+1} - x_{i-1}) = (\cdot - x)_+^k [x_i, x_{i+1}] - (\cdot - x)_+^k [x_{i-1}, x_i] = \frac{(x_{i+1}-x)_+^k - (x_i-x)_+^k}{x_{i+1}-x_i} - \frac{(x_i-x)_+^k - (x_{i-1}-x)_+^k}{x_i-x_{i-1}}$$

$\varphi_i(x) = \qquad \qquad \qquad \varphi_{i-1}(x) =$

מוסיפים צמתים פיקטיביים להגדרת בסיס שלם של $S_1 : x_{-1}, x_{n+1}$ ומקבלים את הבסיס: $\{B_i^{(1)}(x)\}_{i=0}^n$ בו יש $n + k = n + 1$ איברים.



טענה <<<

- (א) ל- $B_i^{(k)}$ תומך סופי (x_{i-m_1}, x_{i+m_2})
- (ב) $B_i^{(k)} > 0$ בקטע (x_{i-m_1}, x_{i+m_2})
- (ג) $\sum_{i=-m_2+1}^{n+m_1-1} B_i^{(k)}(x) = 1$

הוכחה

(א) $B_i^{(k)}(x) = (\cdot - x)_+^k \underbrace{[x_{i-m_1+1}, \dots, x_{i+m_2}]}_{\varphi_i(x)} - (\cdot - x)_+^k \underbrace{[x_{i-m_1}, \dots, x_{i+m_2-1}]}_{\varphi_{i-1}(x)}$

1. $\varphi_i(x) = 0$ אם $x > x_{i+m_2}$

2. $\varphi_i(x) = 1$ אם $x < x_{i-m_1+1}$ בתחום זה φ_i הוא הפרש מחולק מסדר k של $(\cdot - x)_+^k$ ולכן שווה ל-1, כי זו הנגזרת ה- k מחולק ב- $k!$.

סה"כ: $\varphi_i, \varphi_{i+1} \equiv 0$ עבור $x > x_{i+m_2}$ ו- $\varphi_i, \varphi_{i-1} \equiv 1$ עבור $x < x_{i-m_1}$ ולכן ההפרש ביניהן שונה מ-0 רק ברווח $[x_{i-m_1}, x_{i+m_2}]$.

(ג) $\sum_{i=-m_2+1}^{n+m_1-1} B_i^{(k)}(x) = \sum (\varphi_i(x) - \varphi_{i-1}(x)) \stackrel{\text{טלסקופי}}{=} \varphi_{n+m_1-1}(x) - \varphi_{-m_2}(x) \stackrel{x \in [a,b]}{=} 1 - \begin{cases} x > x_0 \text{ אם } \varphi_{-m_2}(x) = 0 \\ x \leq x_n \text{ אם } \varphi_{n+m_1-1}(x) = 1 \end{cases}$

(ב) נניח ש- $B_i^{(k)}$ מתאפס בנקודה בקטע (x_{i-m_1}, x_{i+m_2}) , אז יש שני אפסים לנגזרת הראשונה,

שלושה לשניה וכן הלאה עד k אפסים לנגזרת ה- $k-1$.

ספליין ממעלה 1 (הנגזרת ה-1 של $B_i^{(k)}$) הוא אפס זהותי אם יש לו k אפסים פנימיים.



$S_3 - k = 3$

עבור נקודות במרווחים שווים $x_i = ih$ הבסיס ל- S_3 הוא $\{B_{-1}^{(3)}, \dots, B_{n+1}^{(3)}\} - n + 3$ איברי בסיס, לכולם תומך החותך את $[0, nh]$. הצגת פולינום

כללית $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} q_i B_i^{(3)}(x) : s \in S_3$

פתרון בעיית אינטרפולציה ב- x_0, \dots, x_n בעזרת B-Splines

נמצא $s(x)$ המקיים $s(x_i) = f(x_i)$ לכל $i = 0, \dots, n$ ומקיים תנאי שפה $s''(0) = s''(nh) = 0$. הנעלמים הם: $\{q_i\}_{i=-1}^{n+1}$

עבור: $s(ih) = \sum_{j=-1}^{n+1} q_j B_j^{(3)}(ih) = f(ih)$

אם $|i - j| > 1$ אז $B_j^{(3)}(ih) = 0$

על אלכסון המטריצה: $B_j^{(3)}(x) = B_2^{(3)}(x - (j - 2)h)$; $B_j^{(3)}(x) = B_2^{(3)}(2h) = \frac{2}{3}$ (מופיע בדף הנוסחאות) ומכאן:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j-1} \\ q_j \\ q_{j+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

חישוב התרומה למערכת המשוואות מהתנאי $s''(0) = 0$:

$$\begin{cases} B_2^{(3)''}(h) = \frac{1}{h^2} \\ B_2^{(3)''}(2h) = -\frac{2}{h^2} \Rightarrow q_{-1} \cdot \frac{1}{h^2} + q_0 \cdot \left(-\frac{2}{h^2}\right) + q_1 \cdot \frac{1}{h^2} = 0 \\ B_3^{(3)''}(2h) = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

אופטימליות של Spline ממעלה 3:

יהי $s \in S_3$ עם צמתים $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ונגיח רציפה ו- $f(x_i) = s(x_i)$ לכל $i = 0, \dots, n$.

$$\int_a^b (f'''(x))^2 dx - \int_a^b (s'''(x))^2 dx = \int_a^b (f'' - s'')^2 dx + 2 \int_a^b s'' \cdot (f'' - s'') dx \stackrel{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} \dots$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} s''' [f' - s'] dx \right] + 2s''(f' - s')|_a^b + \int_a^b (f'' - s'')^2 dx \stackrel{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} \dots$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{s^{(4)}}_{\substack{\text{כי על כל קטע זה} \\ \text{פולינום ממעלה 3}}} [f - s] dx - \underbrace{s'''}_{\substack{=0 \\ \text{כי } f(x_i)=s(x_i)}} (f - s) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right] + 2s''(x)(f' - s')|_a^b + \int_a^b (f'' - s'')^2 dx \stackrel{\geq 0}{\geq 0}$$

ומכאן ש-אי שלילי $\int_a^b (f'')^2 - \int_a^b (s'')^2 = s''(f' - s')|_a^b$

מסקנה: מבין כל הפונקציות עם נגזרת שניה רציפה שמקיימות תנאי אינטרפולציה ב- $\{x_i\}_{i=0}^n$, ה-spline הטבעי אופטימלי מבחינת מינימום ל-

$\int_a^b (s'')^2$, וגם ה-spline שמתלכד עם ערכי הנגזרת בקצוות הוא אופטימלי.

מערכת משוואות עם יותר משוואות מנעלמים:

הבעיה: למצוא x כך ש- $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$, כאשר $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^t x}$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$

<<< טענה:

הפתרון x שמביא למינימום את $\|Ax - b\|_2$ הוא אותו x הפותר את $A^t(Ax - b) = 0$ (וקטור השגיאות מאונך לעמודות A).
וקטור השגיאות

הוכחה:

$$\|Ay - b\|_2^2 = (Ay - b)^t(Ay - b) = (Ay - Ax + Ax - b)^t(Ay - Ax + Ax - b) =$$

$$\underbrace{\|Ay - Ax\|_2^2}_{\geq 0} + \|Ax - b\|_2^2 + 2 \underbrace{(Ay - Ax)^t(Ax - b)}_{\substack{=(y-x)A^t(Ax-b) \\ =0}}$$

ולכן לכל y : $\|Ay - b\|_2^2 \geq \|Ax - b\|_2^2$ ■

מתי קיים פתרון ל- $A^t b = A^t A x$: צריך ש- $A^t A$ תהיה רגולרית (הפיכה). תנאי מספיק והכרחי - הדרגה של A שווה למספר העמודות שלה.

Splines – קירוב ריבועים מינימלי – Least-Squares :

נניח נתונים $\{f(t_j)\}_{j=1}^M, t_j \in [0, nh]$, $M \gg n$.

מחפשים spline ממעלה 3 $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i^{(3)}(x)$ כך ש $\sum_{j=1}^M (s(t_j) - f(t_j))^2 \rightarrow \min$

ניצור מערכת של M משוואות עבור $n + 3$ נעלמים $\{c_i\}_{i=-1}^{n+1}$: $\underbrace{\sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i^{(3)}(t_j)}_{s(t_j)} \cong f(t_j)$: במטריצה A: בשורה j בעמודה i נמצא $B_i^{(3)}(t_j)$