סיכומים למבחן באנליזה נומרית 1

סמסטר ב' 2010 (פרופ' דוד לוין)

<u>Floating point</u>:

הצגת מספרים ב-64 ביטים: $\underset{b_{63}}{\boxed{sgn}}\ \underset{b_{62}\dots b_{52}}{\boxed{exponent}}\ \underset{b_{51}\dots b_0}{\boxed{mantissa}}$

- $b_0 - b_{51}$: מייצגים את ה-mantissa, כאשר $\frac{1}{2} \le m < 1$
- $b_{52} - b_{62}$: מייצגים את ה-exponent E
- b_{63}: מייצג את הסימן S

ייצוג המספר: $(-1)^S \cdot [1 + b_{51} \cdot 2^{-1} + b_{50} \cdot 2^{-2} + \cdots + b_0 \cdot 2^{-52}] \cdot 2^{E-1023}$

זה אומר שייצוג עשרוני של מספר הוא בערך עד (כולל) הספרה ה-15 מימין לנקודה.

<u>סימוני O גדול ו-o קטן</u>:

עבור פונקציות f, g נאמר:

- $f(x) = O\big(g(x)\big)$ כאשר $x \to \infty$: קיים x_0 כך שלכל $x \ge x_0$: $|f(x)| \le C \cdot |g(x)|$ עבור קבוע C כלשהו (שאיפת $f(x)$ כש-$x \to \infty$ חסומה מנקודה מסויימת ע"י שאיפת $g(x)$).
- $f(x) = o\big(g(x)\big)$ כאשר $x \to \infty$: לכל $\epsilon > 0$ קיים x_0 כך שלכל $x \ge x_0$: $|f(x)| \le \epsilon \cdot |g(x)|$, או לחילופין: $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

נניח כי $\alpha_n = \alpha + O\big(f(n)\big)$, $\beta_n = \beta + O\big(g(n)\big)$, $g(n) = O\big(f(n)\big)$, $f(n) = O(1)$, אז:

- $\alpha_n + \beta_n = \alpha + \beta + O\big(f(n)\big)$
- $\alpha_n \cdot \beta_n = \alpha \cdot \beta + O\big(f(n)\big)$

<u>שגיאה</u>:

- <u>שגיאה אבסולוטית</u>: עבור ערך x וקירוב $\tilde{x}$ השגיאה האבסולוטית היא: $e_{abs} = |x - \tilde{x}| = \delta x$
- <u>שגיאה יחסית</u>: $e_{rel} = \left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = \left|\frac{\delta x}{x}\right|$ - ככל שקרובה ל-1, כך הקירוב פחות טוב. ככל שקרובה ל-0, כך הוא יותר טוב.

<u>משפט הקירוב של Weierstrass (לא צריך ללמוד הוכחה)</u>:

- תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ברווח סופי סגור $[a, b]$.
- לכל $\epsilon > 0$ קיים $n = n(\epsilon)$ (תלוי ϵ) ופולינום ממעלה n: $p_n(x)$ כך שלכל $x \in [a, b]$ מתקיים: $|f(x) - p_n(x)| \le \epsilon$.

כלומר כל ϵ $tolerance$ מגדיר פולינום המקרב אותנו עד כדי ϵ ל-f.

<u>פולינומי ברנשטיין</u>:

מרחב הפולינומים הוא מרחב וקטורי של פונקציות. פולינומי ברנשטיין מוגדרים מעל $[0,1]$: $\boxed{B_k^n(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ \ 0 \le k \le n}$

הם מהווים בסיס לפולינומים ממעלה n. תכונות:

- $B_k^n(x) \ge 0$, $x \in [0,1]$
- $\sum_{k=0}^n B_k^n(x) \equiv 1$ (לפי הבינום)
- $\sum_{k=0}^n \frac{k}{n} B_k^n(x) \equiv x$
- $\sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} B_k^n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot x^2 + \frac{1}{n} \cdot x = x^2 + O\left(\frac{1}{n}\right)$
- $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 B_k^n(x) = \frac{x(1-x)}{n}$

בהוכחת משפט Weierstrass משתמשים בבניה: $p_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot B_k^n(x)$ - דוגמים את הפונקציה במרווחים של $\frac{1}{n}$.

<u>תכונות רציפות של פונקציה</u>:

אם f רציפה ב-$[0,1]$ אז קיים M כך ש:

- $|f(x)| \le M$ לכל $x \in [0,1]$.
- לכל $\epsilon > 0$ קיים δ כך ש-$|f(x_1) - f(x_2)| \le \epsilon$ אם $|x_1 - x_2| \le \delta$, $x_1, x_2 \in [0,1]$.

<u>משפט Chebyshev (קירוב טוב ביותר)</u>:

- תהא $f(x)$ פונקציה רציפה ברווח סופי סגור $[a,b]$.
- אז קיים פולינום **יחיד** ממעלה n שהוא המקרב הטוב ביותר ל-f בנורמת המקסימום, $\|f - p_n\| = \max_{x\in[a,b]}|f(x) - p_n(x)|$.
- p_n הוא המקרב הטוב ביותר ל-f בנורמת המקסימום אם יש $n+2$ נקודות $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \le b$ כך ש:

$$|f(x_i) - p_n(x_i)| = (-1)^i \cdot \epsilon \cdot \|f - p_n\|, \qquad \epsilon = sign\big(f(x_o) - p_n(x_0)\big)$$

<u>אינטרפולציה ע"י פולינום</u>:

<u>בעית האינטרפולציה</u>:

תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ונתונים ערכי f בנקודות $x_0, \dots, x_n$ (שונות זו מזו): $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$. רוצים למצוא פולינום $p \in \Pi_n$ (מרחב הפולינום ממעלה $\le n$) שמקיים את תנאי האינטרפולציה: $p(x_i) = f(x_i), i = 0, \dots, n$.

<u>>>> הוכחת יחידות פולינום אינטרפולציה</u>:

נניח כי $p, q \in \Pi_n$ שני פולינומים שמקיימים את תנאי האינטרפולציה, ונגדיר פולינום הפרש: $r = p - q$. ברור כי $r \in \Pi_n$ ולכל $i = 0, \dots, n$ מתקיים $r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = 0$. כיוון שזהו פולינום ממעלה לכל היותר n והוא מתאפס ב-$n+1$ נקודות אזי $r \equiv 0$ (לפי טענת העזר להלן).

<u>טענת עזר</u>: אם $r \in \Pi_n$ ו-$r(x_i) = 0$ לכל $i = 0, \dots, n$ (נקודות שונות) אז $r \equiv 0$.

<u>הוכחה</u>: כיוון ש-$r(x_0) = 0$ אז ניתן להוציא גורם משותף $(x - x_0)$ ע"י פיתוח טיילור <u>סופי</u> סביב x_0:

$$r(x) = \underbrace{r(x_0)}_{=0} + r'(x_0)(x - x_0) + \frac{r''(x_o)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots$$

הפיתוח לעיל סופי כי $r^{(n+1)} \equiv 0$ כי r פולינום ממעלה לכל היותר n. מכאן ש-$r(x) = (x - x_0) \cdot \underbrace{r'(x_0) + \cdots}_{r_1(x):=}$ ו-$r_1 \in \Pi_{n-1}$. ניתן להמשיך כך להוציא את כל הגורמים עד ש-$r(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot r_n(x)$ ו-$r_n \in \Pi_0$. כיוון ש-$r_n(x_n) = 0$ (זה החלק ב-$r(x)$ שמאפס את הפולינום עבור x_n) אז בהכרח $r_n \equiv 0$ ולכן $r \equiv 0$. ■

<u>>>> הוכחת קיום + יחידות (על הדרך) פולינום אינטרפולציה</u>:

נשתמש בבסיס המונומים $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ למרחב Π_n. מחפשים $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ כך ש-$p(x_i) = f(x_i)$ לכל $i = 0, \dots, n$.

ניצור מערכת משוואות:

$$\begin{cases} p(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ \dots \\ p(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases} \xrightarrow[matrix]{} \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \to A \cdot \bar{a} = \bar{b}$$

מתקיים: $\det(A) = |A| \underset{Vandermonde}{=} \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^n (x_i - x_j)$ וכיוון שכל x_j שונים זה מזה אז $|A| \neq 0$ ומכאן ש**קיים** פתרון למערכת המשוואות ופתרון זה הוא **יחיד**. ■

<u>אינטרפולצית Lagrange</u>:

<u>בסיס Lagrange</u>:

עבור בעית אנטרפולציה נתונה עם נקודות $x_0, \dots, x_n$ נגדיר בסיס ל-Π_n: $\boxed{l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \in \Pi_n, \ \ 0 \le k \le n}$

כל פולינום כזה הוא ממעלה לכל היותר n כי יש לכל היותר n גורמים במכפלה (מדלגים על k). מתקיים: $l_k(x_j) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \end{cases}$.

הקבוצה $\{l_k\}_{k=0}^n$ היא בסיס: גודלה $n+1$ ולכן מספיק להראות שאיבריה בת"ל. נניח $c_0l_0(x) + \cdots + c_nl_n(x) = 0$ ונציב x_j. לכל $j = 0, \dots, n$ מתקיים: $c_0 \cdot \underbrace{l_0(x_j)}_{=0} + \cdots + c_j \cdot \underbrace{l_j(x_j)}_{=1} + \cdots = 0$, כלומר $c_j = 0$. מכאן שהקבוצה בת"ל, ולכן זהו אכן בסיס.

<u>פתרון אינטרפולציה עם פולינומי Lagrange</u>:

פתרון האינטרפולציה: $\boxed{p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)}$

כיוון שלכל $j=0,\dots,n$ מתקיים: $p(x_j)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x_j)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot \delta_{j,k}=f(x_j)$

<u>אינטרפולציית Newton</u>:

נשתמש בבסיס: $\{1,(x-x_0),(x-x_0)(x-x_1),\dots,\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)\}$ - כל הוספת נקודה נוספת לא משנה את כל איברי הבסיס, בניגוד לאינטרפולציית Lagrange.

בהינתן פתרון עבור נקודות $x_0,\dots,x_k$: $p_k\in\Pi_k$ המקיים $p_k(x_i)=f(x_i), i=0,\dots,k$ נמצא פתרון עבור נקודה נוספת x_{k+1}:

$p_{k+1}(x)=p_k(x)+A\cdot\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)$, כאשר A קבוע אותו מחלצים מתוך $p_{k+1}(x_{k+1})=p_k(x_{k+1})+A\cdot\prod_{i=0}^{k}(x_{k+1}-x_i)$.

<u>פתרון אינטרפולציה בבסיס ניוטון</u>:

פתרון האינטרפולציה: $\boxed{p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,x_1,\dots,x_k]\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(x-x_j)}$ כאשר $f[x_0,x_1,\dots,x_k]$ הוא **הפרש מחולק** מסדר k.

<u>הפרשים מחולקים</u>:

- $f[x_0]=f(x_0)$
- $f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{f[x_1,\dots,x_k]-f[x_0,x_1,\dots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$

הערה: הסדר הפנימי בתוך ההפרש המחולק לא משנה.

<u>>>> הוכחת נכונות אינטרפולצית Newton</u>:

- נניח $p_{k-1}(x)$ פולינום הפותר את בעית האינטרפולציה עבור נקודות $x_0,\dots,x_{k-1}$.
- נניח $q_{k-1}(x)$ פולינום הפותר את בעית האינטרפולציה עבור נקודות $x_1,\dots,x_k$.

נבנה $p_k(x)$ פולינום הפותר את הבעיה עבור כל הנקודות $x_0,\dots,x_k$: $p_k(x)\coloneqq\frac{x-x_0}{x_k-x_0}\cdot q_{k-1}(x)+\frac{x_k-x}{x_k-x_0}\cdot p_{k-1}(x)$. מתקיים:

- $p_k(x_0)=0+1\cdot p_{k-1}(x_0)=f(x_0)$ - מהגדרת p_{k-1}
- $p_k(x_k)=1\cdot q_{k-1}(x_k)+0=f(x_k)$ מהגדרת q_{k-1}
- $p_k(x_i)=\frac{x_i-x_0}{x_k-x_0}\cdot \underbrace{q_{k-1}(x_i)}_{=f(x_i)}+\frac{x_k-x_i}{x_k-x_0}\cdot \underbrace{p_{k-1}(x_i)}_{=f(x_i)}=\frac{x_i-x_0+x_k-x_i}{x_k-x_0}\cdot f(x_i)=1\cdot f(x_i)=f(x_i)$

נשים לב שמקדם החזקה הגבוהה הפולינום הוא ההפרש המחולק האחרון $f[x_0,\dots,x_k]$: $\frac{1}{x_k-x_0}f[x_1,\dots,x_k]+\frac{-1}{x_k-x_0}f[x_0,\dots,x_{k-1}]$ ■

הערה: הוכחה זו היא הוכחה באינדוקציה כאשר ההנחה ל-$k-1$ נותנת שני פולינומים שונים.

<u>>>> משפט</u>:

- אם $f:[a,b]$ בעלת k נגזרות רציפות ו-$x_i\neq x_j$, $x_0,\dots,x_k\in[a,b]$
- אז יש $\xi\in[a,b]$ כך ש-$f[x_0,\dots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$

הוכחה:

נגדיר $e_k(x)\coloneqq f(x)-p_k(x)$ כאשר $p_k(x)$ פתרון אינטרפולציה בנקודות $x_0,\dots,x_k$. ב-$k+1$ הנקודות הללו מתקיים $e_k(x_i)=0$, ומכאן של-$e_k'(x)$ יש k אפסים לפחות בקטע $[a,b]$ (לפי משפט שבין כל שני אפסים של f יש ל-f' אפס). ל-$e_k''(x)$ יהיו לפחות $k-1$ אפסים ב-$[a,b]$ וכך הלאה עד של-$e_k^{(k)}(x)$ יהיה לפחות אפס אחד בקטע $[a,b]$.

$\Leftarrow$ קיים $\xi\in[a,b]$ כך ש-$e_k^{(k)}(\xi)=0$. כיוון ש-$e_k^{(k)}(x)=f^{(k)}(x)-p_k^{(k)}(x)$ אז $f^{(k)}(\xi)-p_k^{(k)}(\xi)=0$. נשים לב כי $p_k^{(k)}=c_k\cdot k!$ (c_i הם מקדמי p_k) ו-$c_k=f[x_0,\dots,x_k]$ כיוון שזה מקדם החזקה הגבוהה ביותר ב-$p_k(x)$.

מכאן: $\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ $f^{(k)}(\xi)-f[x_0,\dots,x_k]\cdot k!=0\Rightarrow f[x_0,\dots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$ ■

<u>השגיאה באינטרפולציה</u>:

<u>נוסחת השגיאה</u>:

השגיאה בנקודה x לפולינום אינטרפולציה p_n בנקודות $x_0,\dots,x_n$ היא: $\boxed{f(x)-p_n(x)=f[x_0,\dots,x_n,x]\cdot\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$

<<< הוכחה לנוסחת השגיאה:

לפי בניית p_n מתקיים $f(x_i) = p_n(x_i)$ לכל $i = 0, \dots, n$, כלומר $e_n(x_i) = 0$. יהי $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$, נבנה פולינום אינטרפולציה p_{n+1} ב- $x_0, \dots, x_n, x$: $p_{n+1}(z) = p_n(z) + f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \prod_{i=0}^{n}(z - x_i)$ - לפי בניית Newton. מהבניה מתקיים: $p_{n+1}(x) = f(x)$ ולכן:

$e_n(x) = f(x) - p_n(x) = p_{n+1}(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ - כנדרש ■

<u>מסקנה מנוסחת השגיאה והמשפט הקודם:</u>

אם f בעלת $n+1$ נגזרות רציפות: $\boxed{f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$ כאשר ξ ברווח המכיל את $x_0, \dots, x_k, x$.

בד"כ לא ניקח את $f^{(n+1)}(\xi)$ אלא חסם עליון לנגזרת ה-$n+1$ בקטע. נוסחת השגיאה מתאימה גם ל-x מחוץ לרווח האינטרפולציה.

<u>מקרים מיוחדים של בחירת נקודות אינטרפולציה:</u>

1. אינטרפולציה בנקודות שוות מרחק ב-$[a, b]$:

עבור $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$, $h = \frac{b-a}{2}$ - נקודות במרווחים קבועים באורך h החסם העליון לשגיאה:

$$\boxed{|f(x) - p_n(x)| \le \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \cdot \frac{1}{4(n+1)} \cdot h^{n+1}}$$

2. אינטרפולציה בנקודות Chebyshev:

נקודות האינטרפולציה יהיו שורשי פולינום Chebyshev. פולינום Chebyshev ממעלה n:

- נוסחה ישירה: $T_n(x) = \cos(n \cdot arccos\, x)$
- נוסחת נסיגה: $\begin{cases} T_0(x) = \cos(0) = 1 \\ T_1(x) = \cos(arccos\, x) = x \\ T_{k+1}(x) = 2x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x) \end{cases}$ (נובעת מהזהות הטריגונומטרית: $\cos[(k+1)\Theta] = 2\cos\Theta \cos k\Theta - \cos[(k-1)\Theta]$)

בקטע $[-1,1]$ הפולינום חסום ע"י 1 (חסם ל-cos). בגלל תחום ההגדרה של arcos, כדי להשתמש בפולינום זה צריך העתקה $[-1,1] \to [a, b]$:

- לקירוב $g(t), t \in [a, b]$ נגדיר: $x \in [-1,1]$, $f(x) \coloneqq g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right)$ (הזזה וכיווץ לקטע $[-1,1]$).
- בהינתן קירוב p_n ל-f, נעתיק חזרה ל-$[a, b]$: $g(t) \cong p_n\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{2}{a-b}t\right)$.

<u>תכונות $T_n(x)$:</u>

- נקודות האקסטרמום של $T_n(x)$ הם: $t_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right), j = 0, \dots, n$
- ערכי הפולינום בנקודות האסטרמום הם ± 1 לסירוגין: $\left|T_n(t_j)\right| = 1$

<u><<< משפט</u>:

$$\max_{x \in [-1,1]} |x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| \ge \max_{x \in [-1,1]} |2^{-n+1} \cdot T_n(x)| = 2^{-n+1}$$

כלומר שורשי פולינום Chebyshev מביאים למינימום את $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ עבור $x \in [-1,1]$/

הוכחה:

הביטוי $2^{-n+1} \cdot T_n(x)$ מקבל ערכי אקסטרמום $\pm 2^{-n+1}$ לסירוגין בקטע $[-1,1]$ ב-$n+1$ נקודות. נניח שקיים $q_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ המקיים: $\max_{x \in [-1,1]} |q_n(x)| \le 2^{-n+1}$. כיוון ש-$q_n(x)$ חסום בין $\pm 2^{-n+1}$ הוא חותך את $2^{-n+1} \cdot T_n(x)$ בין כל שתי נקודות אקסטרמום סמוכות, כלומר לפחות ב-n נקודות. בנקודות אלו ההפרש מתאפס: $r_n(x) = \underbrace{2^{-n+1} \cdot T_n(x)}_{=x^n + \cdots} - \underbrace{q_n(x)}_{=x^n + \cdots} \in \Pi_{n-1}$ (שני רכיבי ה-x^n מאפסים אחד את השני).

$\Leftarrow$ כיוון ש-r_n הוא פולינום ממעלה $n-1$ לכל היותר ומתאפס ב-n נקודות אזי $r_n \equiv 0$. ■

<u>שגיאת האינטרפולציה בנקודות Chebyshev:</u>

שגיאת האינטרפולציה ב-$n+1$ שורשי $T_{n+1}(x)$ (פולינום ממעלה n):

$$\boxed{|f(x) - p_n(x)| \le \max_{\eta \in [-1,1]} \left|f^{(n+1)}(\eta)\right| \frac{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}{(n+1)!} \le \max_{\eta \in [-1,1]} \left|f^{(n+1)}(\eta)\right| \frac{2^{-n}}{(n+1)!}}$$

חסם זה נובע מבחירת x_i להיות $n+1$ שורשי $T_{n+1}(x)$ כדי להביא למינימום את $\max_{x \in [-1,1]} \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$

<u>פתרון משוואות לא לינאריות</u>:

<u>משוואה לא לינארית</u>: רוצים למצוא עבור f כלשהי שורש x, כלומר המקיים $f(x)=0$.

<u>שגיאה</u>: עבור סדרת קירובים לשורש $\bar{x}$: $\{x_n\}$ נוסחת השגיאה היא: $\boxed{e_n = x - x_n}$.

<u>סדר התכנסות</u>: שיטה תהיה מסדר p אם מתקיים: $\boxed{|e_{n+1}| \le c \cdot |e_n|^p}$

<u>שיטת החציה</u>:

עבור שתי נקודות a, b המקיימות $f(a)\cdot f(b) < 0$ (סימנים הפוכים), בודקים את $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ וממשיכים לחצי בו מכפלת ערכי הפונקציה עדיין שלילית.

<u>סדר התכנסות</u>: $|e_{n+1}| \le \frac{1}{2}|e_n|$ כיוון שבכל צעד מקטינים את הקטע פי שניים מהקודם. מכאן ש: $p = 1$.

<u>שיטת המיתר</u>:

בהינתן שתי נקודות x_n, x_{n-1}, מוצאים את x_{n+1} באופן הבא: מוצאים את הישר העובר ב-x_n, x_{n-1} (אינטרפולציה לינארית), ולוקחים את x_{n+1} להיות חיתוכו עם ציר ה-x. הנוסחה:

$$\boxed{x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})}$$

<u>סדר התכנסות</u>: $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<u>שיטת Newton</u>:

בהינתן x_n מחשבים פיתוח טיילור מסדר ראשון סביבה – זו משוואת המשיק. x_{n+1} תהיה נקודת החיתוך שלו עם ציר ה-x. הנוסחה:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

<u>סדר התכנסות</u>: $p = 2$

<u>אנליזה של התכנסות לנקודת שבת של הפונקציה g של שיטה איטרטיבית מהצורה $x_{n+1} = g(x_n)$</u>:

<u><<< משפט נקודת השבת</u>:

תהי g המקיימת עבור $I = [a,b]$:

1. $g(I) \subseteq I$
2. $g \in C[a,b]$
3. g גזירה ב-$[a,b]$ ו-$|g'(x)| \le k < 1$ לכל $x \in [a,b]$.

אז האיטרציות $x_{n+1} = g(x_n)$ מתכנסות לכל תנאי התחלה $x_0 \in [a,b]$ לנקודת שבת **יחידה** ב-$[a,b]$.

הוכחה:

<u>קיום</u>: תהי $g: [a,b] \to [a,b]$, אז $g(a) \ge a, g(b) \le b$ ומכאן עבור $h(x) \coloneqq g(x) - x$ מתקיים: $h(a) \ge 0, h(b) \le 0$.

כיוון ש-h סכום שתי פונ' רציפות, היא רציפה ב-$[a,b]$, ולכן קיימת $\xi \in [a,b]$ כך ש-$h(\xi) = 0$, ומכאן ש-$g(\xi) = \xi$ - קיימת נקודת שבת.

<u>יחידות</u>: נניח כי גם $g(\eta) = \eta$ (נקודת שבת נוספת), אז: $\eta - \xi = g(\eta) - g(\xi) \underset{\text{משפט ערך הביניים לנגזרת}}{=} g'(\tau)(\eta - \xi)$

$\Leftarrow |\eta - \xi| = |g'(\tau)(\eta - \xi)| \le k \cdot |\eta - \xi| \underset{k<1}{\Longrightarrow} |\eta - \xi| = 0 \Rightarrow \eta = \xi$ (כי $a = ka, k < 1 \Rightarrow a = 0$)

<u>הוכחת התכנסות</u>: תהי $\bar{x}$ נקודת השבת היחידה ב-$[a,b]$. נבדוק התכנסות:

$$\text{השגיאה באיטרציה ה-}n+1 = e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = g(x_n) - \bar{x} \underset{\bar{x}=g(\bar{x})}{=} g(x_n) - g(\bar{x}) \underset{\text{משפט ערך הביניים לנגזרת}}{=} g'(\tau)(x_n - \bar{x}) = g'(\tau)\cdot e_n$$

$$\Rightarrow |e_{n+1}| \le k \cdot |e_n|, 0 \le k < 1 \Rightarrow |e_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

<u>מציאת תחום התכנסות</u>: מוצאים את התחום בו:

- $|g'(x)| < 1$
- $g[a,b] \subseteq [a,b]$

<u>>>> טענת קיום סביבת התכנסות</u>:

אם g גזירה ברציפות בקטע פתוח סביב נקודת שבת $\bar{x}$ שלה ו-$|g'(\bar{x})| < 1$ אז קיימת סביבה: $I = [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]$ כך ש-$x_{n+1} = g(x_n)$ מתכנס לכל תנאי התחלה $x_0 \in I$.

הוכחה:

בגלל ש-g' רציפה קיימת סביבה של $\bar{x}$ כך ש-$|g'(x)| \le k < 1$ לכל $x \in [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]$ (הסביבה). עבור η ברווח בין x ל-$\bar{x}$ (תלוי מי גדול יותר):

$$g(x) - \bar{x} = g(x) - g(\bar{x}) \underset{\text{ע"ב}}{=} g'(\eta)(x-\bar{x}) \Rightarrow |g(x)-\bar{x}| \le k \cdot |x-\bar{x}|, \quad x \in [\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]$$

לכן ברווח זה מתקיימים תנאי המשפט (כולל הכלה של תמונת g ברווח), ולכן מכל x_0 ב-I יש התכנסות. ■

<u>>>> הוכחת סדר התכנסות $p = 2$ לשיטת Newton</u>:

<u>טענה</u>: אם $\bar{x}$ שורש של f ו-$f'(\bar{x}) \neq 0$ אז g איטרצית ניוטון מקיימת: $|g'(\bar{x})| < 1$ ויש סביבה של $\bar{x}$ בה איטרצית ניוטון מתכנסת.

<u>טענה</u>: אם $g'(\bar{x}) = 0$ אז סדר שיטת ניוטון הוא 2: $|e_{n+1}| \le c \cdot |e_n|^2$

<u>הוכחה</u>: נניח כי g'' רציפה בסביבת $\bar{x}$ ונפתח את $g(x_n)$ בטור סביב $\bar{x}$:

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \bar{x} = g(x_n) - g(\bar{x}) = \underbrace{g(\bar{x}) + \underset{=0}{g'(\bar{x})} \cdot (x_n - \bar{x}) + \frac{g''(\eta)}{2}(x_n-\bar{x})^2}_{Taylor} - g(\bar{x}) = \frac{g''(\eta)}{2}(x_n-\bar{x})^2 = \frac{g''(\eta)}{2}e_n^2$$

g'' חסומה בסביבה $[\bar{x}-\epsilon, \bar{x}+\epsilon]$ ולכן מתקיים $|e_{n+1}| \le c \cdot |e_n|^2$ ■

<u>אינטרפולציה לפונקציה ונגזרותיה – אינטרפולצית Hermite</u>:

נתונות נקודות $\{t_i\}_{i=1}^k$ עם ערכים $f^{(j)}(t_i)$, $j = 0, \dots, m_i - 1$ (סה"כ m_i ערכים לכל t_i).

<u>משפט אינטרפולציה לפונקציה ונגזרותיה (לא צריך ללמוד הוכחה)</u>:

קיים פולינום יחיד p_n ממעלה $n = \sum_{i=1}^k m_i - 1$ המקיים $p_n^{(j)}(t_i) = f^{(j)}(t_i)$ עבור $1 \le i \le k$, $j = 0, \dots, m_i - 1$:

$\boxed{p_n(x) = \sum_{j=0}^n f[x_0, \dots, x_j] \cdot \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)}$ כאשר $t_1 = x_0 = x_1 = \dots = x_{m_1-1}, t_2 = x_{m_1} = x_{m_1+1} = \dots = x_{m_1+m_2-1}, \dots$

<u>השגיאה</u>: $\boxed{f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \prod_{j=0}^n (x - x_j)}$

לכל נקודה מצמידים מספר xים בהתאם לריבוי שלה – כלומר בהתאם ל-m_i שלה: לכל t_i ה-xים יהיו $x_{m_{i-1}}, \dots, x_{m_i-1}$.

<u>הפרשים מחולקים במקרה הכללי</u>:

כאשר מתאפשרות נקודות עם ריבוי, ואם נניח כי $x_i \le x_{i+1}$:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = x_1 = \dots = x_k \\ \dfrac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & \text{אחרת} \end{cases}$$

<u>מערכת משוואות לינאריות</u>:

<u>נורמות של מטריצות ווקטורים</u>:

<u>תכונות נורמות</u>:

- $\|x\| \ge 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ עבור סקלר α.
- אשמ"ש: $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

נורמות וקטוריים: יהי x וקטור ממימד n

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$
- נורמת מקסימום (אינסוף): $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

נורמות מטריצות:

עבור $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$: $\boxed{\|A\| = \max_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$ ולכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

- $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$
- אשמ"ש: $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

כל נורמה p של וקטורים משרה נורמה p של מטריצות.

$\|A\|_1 = \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right|\right\}$ - נורמה 1 של מטריצה היא מקסימום סכום ע"מ בעמודות.

<u>>>> הגדרת נורמת מקסימום למטריצות</u>:

עבור $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ מתקיים: $\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right|\right\}}$ - נורמת מקסימום של מטריצה היא מקסימום סכום ע"מ בשורות.

הוכחה:

נסמן $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\cdot x_j$. נחסום מלמעלה:

$$\boxed{\|A\|_\infty} = \max_{\|x\|\neq 0}\left\{\frac{\max_{1\le i\le n}|(Ax)_i|}{\max_{1\le i\le n}|x_i|}\right\} \underset{(*)}{\boxed{\le}} \max_{\|x\|\neq 0}\left\{\max_{1\le i\le n}\frac{\max_{1\le j\le n}|x_j|\cdot\sum_{j=1}^n|a_{ij}|}{\max_{1\le i\le n}|x_i|}\right\} =$$

$$\max_{\|x\|\neq 0}\left\{\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|\right\} \underset{\text{לא תלוי ב-x}}{=} \boxed{\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|}, \quad (*)\ \left|(Ax)_i\right| \le \sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|\cdot\left|x_j\right| \le \max_{1\le j\le n}\left|x_j\right|\cdot\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|$$

כדי להוכיח שוויון מספיק להראות שוויון עבור וקטור יחיד x כך ש: $\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|\right\}$.

קיימת ב-A שורה $\bar{\imath}$ כך ש: $\forall i$, $\sum_{j=1}^n\left|a_{\bar{\imath}j}\right| \ge \sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|$. נגדיר את x כך ש-$x_j := sign\left(a_{\bar{\imath}j}\right)$ (וקטור של ± 1, 0 - $\|x\|_\infty = 1$).

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \ge \left|\sum_{j=1}^n a_{\bar{\imath}j}\cdot \underset{=sign(a_{\bar{\imath}j})}{x_j}\right| = \sum_{j=1}^n\left|a_{\bar{\imath}j}\right| \Rightarrow$$

מכאן שעבור ה-x שבחרנו מתקיים: $\boxed{\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|} \boxed{\ge} \sum_{j=1}^n\left|a_{\bar{\imath}j}\right| \le \|Ax\|_\infty \underset{\|x\|_\infty=1}{=} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \boxed{\|A\|_\infty}$

$\Leftarrow$ הראנו את אותו חסם משני הצדדים ולכן מתקיים: $\boxed{\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|}$ ■

<u>הערכת שגיאה</u>:

נניח נתון פתרון מקורב $\bar{x}$ למערכת $Ax=b$, והשגיאה היא $e = x - \bar{x}$. ניתן להציב כדי לבדוק קירוב: $r := b - A\bar{x}$.

- $r = b - A\bar{x} = Ax - A\bar{x} = A(x-\bar{x}) = Ae$ ומכאן: $\boxed{\|r\| \le \|A\|\cdot\|e\|}$
- $e = A^{-1}r$ ומכאן: $\boxed{\|e\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|r\|}$

  $\Leftarrow$ מהשניים הנ"ל נובע: $\boxed{\frac{\|r\|}{\|A\|} \le \|e\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|r\|}$

- $b = Ax$ ומכאן: $\boxed{\|b\| \le \|A\|\cdot\|x\|}$
- $x = A^{-1}b$ ומכאן: $\boxed{\|x\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|b\|}$

  $\Leftarrow$ מהשניים הנ"ל נובע: $\boxed{\frac{\|b\|}{\|A\|} \le \|x\| \le \|A^{-1}\|\cdot\|b\|}$

לסיכום: $\boxed{\frac{1}{\|A\|\cdot\|A^{-1}\|}\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|} \le \frac{\|e\|}{\|x\|} \le \|A\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\frac{\|r\|}{\|b\|}}$, $\boxed{cond(A) := \|A\|\cdot\|A^{-1}\|}$ - ה-condition number חסם למספר הספרות שעלולים לאבד בדיוק פתרון משוואה לינארית.

<u>שיטות איטרטיביות לפתרון מערכת משוואות לינאריות מהצורה $Ax=b$</u>:

בהינתן מערכת $Ax=b$ נעביר לצורה $\boxed{x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c}$ כאשר האינדקס העליון הוא אינדקס האיטרציה, וזה נראה כמו משהו עם נקודת שבת.

<u>בצורה מטריציונית</u>: $B = I - GA, c = Gb$, נרצה למצוא G הפיכה (סינגולרית) כזו כך ש: $\boxed{x = (I-GA)x + Gb}$

<u>שיטת Jacobi</u>:

כאשר האלכסון שונה מאפס, מבודדים אותו:

$$Ax=b \Rightarrow 1\le i\le n:\ \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i \Rightarrow a_{ii}x_i=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j+b_i \Rightarrow \boxed{x_i^{(n+1)}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{a_{ij}}{aii}x_j^{(n)}+\frac{b_i}{a_{ii}}}$$

<u>בצורה מטריציונית</u>:

נסמן D את מטריצת האלכסון של L ,A מטריצת האיברים שתחת האלכסון ו-U מטריצת האיברים מעל האלכסון: $A=L+D+U$.

כאן $G=D^{-1}$ - $Dx=-(L+U)x+b \Rightarrow \boxed{x=D^{-1}(-L-U)x+D^{-1}b}$

<u>משפט <<<</u>:

אם $\|B\|<1$ אז התהליך האיטרטיבי $x^{(n+1)}=Bx^{(n)}+c$ מתכנסת לפתרון יחיד של $x=Bx+c$ מכל וקטור התחלתי $x^{(0)}$ (נכון <u>לכל נורמה</u>).

הוכחה:

כדי להראות קיום ויחידות ל-$x=Bx+c$ מספיק להראות של-$x=Bx$ יש רק פתרון טרוויאלי. נניח ש-$x=Bx$ אז:

$$\|x\|=\|Bx\|\le \underbrace{\|B\|}_{<1}\cdot\|x\| \Rightarrow \|x\|<\|x\| \Rightarrow \|x\|=0$$

$\Leftarrow x$ הוא וקטור ה-0 ומכאן שיש פתרון טרויואלי בלבד למשוואה ההומוגנית ולכן יש פתרון יחיד למשוואה הלא הומוגנית $x=Bx+c$. ■

<u>השגיאה</u>:

ביטוי לשגיאה: $\boxed{e^{(n+1)}=x-x^{(n+1)}}$ והוא מתכנס ל-0 כש-$n\to\infty$ מכל תנאי התחלה $x^{(0)}$ כיוון שמקיים: $e^{(n+1)}=Be^{(n)}$ והרי $\|B\|<1$.

אם $x^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ אז $e^{(0)}=x$ ואז השגיאה היחסית באיטרציה ה-n: $\boxed{\frac{\|B^n x\|}{\|x\|}\le\|B^n\|\le\|B\|^n}$

<u>חזרה לשיטת Jacobi</u>:

<u>טענת תנאי התכנסות לשיטת Jacobi <<<</u>:

שיטת Jacobi מתכנסת אם A בעלת אלכסון דומיננטי, כלומר ע"מ איברי האלכסון גדולים מסכום שאר ע"מ של איברי השורה: $|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$.

הוכחה:

נסתכל על שורה i במטריצה $B=(b_{ij})$: $1\le i\le n$, $\Leftarrow \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\underset{\text{אלכסון דומיננטי}}{<}1$

$\|B\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\}<1 \Leftarrow$ השיטה מתכנסת ובפרט יש פתרון יחיד ■

<u>טענת התכנסות נוספת לשיטת Jacobi (מהתרגול)</u>: $\boxed{\rho(B)<1}$ כאשר $\rho(B)=\max_{\lambda\in Eigenvalues(B)}|\lambda|$.

<u>שיטת Gauss-Seidel</u>:

שיטת Gauss-Seidel: $\boxed{x_i^{(n+1)}=-\sum_{j<i}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(n+1)}-\sum_{j>i}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(n)}+\frac{b_i}{a_{ii}}}$

שיטה זו מתכנסת מהר יותר משיטת Jacobi אם:

- A בעלת אלכסון דומיננטי.
- A טרידיאגונלית (רק באלכסון הראשי, באלכסון שתחתיו ובאלכסון שמעליו איברים שונים מ-0).
- ל-A איברים חיוביים באלכסון ואי חיוביים מחוצה לו.

<u>בצורה מטריציונית</u>: כאן $G=(L+D)^{-1}$ - $\boxed{x=-(L+D)^{-1}Ux+(L+D)^{-1}c}$

<u>משפט המעגל של Gershgorin (לאיתור ע"ע)</u>:

לכל ע"ע λ של מטריצה A קיים אינדקס i עבורו: $|a_{ii}-\lambda|\le\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$ - כלומר λ יושב בתוך מעגל שמרכזו איבר מהאלכסון של A ורדיוסו הוא סכום הע"מ של שאר איברי השורה.

<u>שיטת החזקה למציאת ע"ע <<<</u>: השיטה: ע"ע מקסימלי של $\|A\|_2=\sqrt{A^tA}$

הוכחה:

נניח ל-A נתונים מערכת של ע״ע λ_i וו״ע v_i מתאימים כך שמתקיים: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_3|$. עבור כל ע״ע וו״ע מתקיים: $Av_i = \lambda_i v_i$.

יהי $z = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ וקטור כלשהו:

$$A^m z = \sum_{i=1}^{n} a_i A^m v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^m v_i \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1^m} A^m z = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\lambda_i^m}{\lambda_1^m} v_i \xrightarrow[m\to\infty]{} a_1 v_1 \Rightarrow \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^{m+1}} A^{m+1} z \text{ של } j \text{ רכיב}}{\frac{1}{\lambda_1^m} A^m z \text{ של } j \text{ רכיב}} \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{(\lambda_1 a_1 v_1)_j}{(a_1 v_1)_j} = \lambda_1 \quad \blacksquare$$

(רכיב j הוא זה בעל ע״ע מקסימלי).

<u>שיטת מטריצה Q (?)</u>:

$$x = Bx + c \Rightarrow x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c = B\left(Bx^{(n-1)} + c\right) + c = \cdots = c + Bc + B^2 c + \cdots + B^n c = P_n(B) \cdot c$$

נחפש $P_n(x)$ אחר כך ש-$x^{(n+1)} = P_n(B)c$ יהיה קירוב טוב יותר לפתרון x. נגדיר שארית:

$$r^{(n+1)} = c - \left(x^{(n+1)} - Bx^{(n+1)}\right) = c - \left(P_n(B)c - BP_n(B)c\right) = \left((B-I)P_n(B) + I\right)c = Q_{n+1}(B)c \quad \boxed{Q_{n+1}(x) = (x-1)P_n(x) + 1}$$

שחזור $P_n(x)$ מתוך $Q_{n+1}(x)$: $\boxed{P_n(x) = \frac{Q_{n+1}(x) - 1}{x-1}}$ (נשים לב ש-$Q_{n+1}(1) = 1$)

נניח ל-B מערכת ע״ע שלמה: $Bv_i = \lambda_i v_i$, נפתח את c: $c = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \Leftarrow r^{(n+1)} = Q_{n+1}(B)c = Q_{n+1}(B)\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i Q_{n+1}(\lambda_i) v_i$

מכאן שכדי לקבל שארית קטנה צריך ש-Q_{n+1} תקבל ערכים קטנים על הע״ע של B (הספקטרום של B).

נניח ש-$\lambda_i \in [a,b]$ עבור הע״ע של B, ו-$x = 1 \notin [a,b]$ אז: $\boxed{Q_{n+1}(x) = T_{n+1}\left(\frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}$ הוא הפולינום בעל נורמת המקסימום ב-$[a,b]$ ומקיים $Q_{n+1}(1) = 1$ (T_{n+1} - פולינום Chebyshev).

<u>קירוב נגזרות של פונקציה</u>:

<u>שיטה ראשונה</u>:

נתונה הפונקציה f בנקודות $x_0, \ldots, x_k$ ורוצים לקרב את $f'(x)$.

- מוצאים את $p_k(x)$ פולינום האינטרפולציה ב-$x_0, \ldots, x_k$ וידוע מנוסחת השגיאה: $f(x) = p_k(x) + f[x_0, \ldots, x_k, x] \cdot \prod_{i=0}^{k}(x - x_i)$
- נסמן $\psi_k(x) \coloneqq \prod_{i=0}^{k}(x - x_i)$, ומגזירת שני האגפים מקבלים קירוב לנגזרת:

$$\boxed{f'(x) = p_k'(x) + E(x), \quad E(x) = \frac{f^{(k+2)}(\xi_x)}{(k+2)!} \cdot \psi_k(x) + \frac{f^{(k+1)}(\eta_x)}{(k+1)!} \cdot \psi_k'(x)}$$

מציאת קירוב לנגזרת שניה:

$$\boxed{f''(x) = p_k''(x) + \psi_k(x) \cdot f[x_0, \ldots, x_k, x, x, x] + 2\psi_k'(x) f[x_0, \ldots, x_k, x, x] + \psi_k''(x) f[x_0, \ldots, x_k, x]}$$

<u>שיטה שניה</u>:

נמצא קירוב לנגזרת ע״י שימוש ב-$f(a), f(a+h), f(a+2h)$:

$$Taylor \begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\tau_1) \; / \cdot 4 \\ f(a+2h) = f(a) + 2hf'(a) + \frac{4h^2}{2} f''(a) + \frac{8h^3}{6} f^{(3)}(\tau_2) / \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \text{מחברים משוואות ומקבלים} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(a) = \frac{-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)}{2h} - \frac{1}{3} f^{(3)}(\eta) h^2}$$

כאשר לפי משפט ערך הביניים החלפנו את $\frac{1}{3} f^{(3)}(\tau_1) - \frac{2}{3} f^{(3)}(\tau_2)$ ב-$\frac{1}{3} f^{(3)}(\eta)$.

קירוב לנגזרת שניה ע״י שימוש ב-$f(a-h), f(a), f(a+h)$:

$$Taylor \begin{cases} f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) - \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\tau_1) \\ f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24} f^{(4)}(\tau_2) \end{cases} \Rightarrow \text{שוב מחברים משוואות ומקבלים} \Rightarrow$$

$$\boxed{f''(a)=\frac{f(a-h)-2f(a)+f(a+h)}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\eta)}$$

כאשר η מתקבל שוב לפי משפט ערך הביניים.

אינטגרציה נומרית ופולינומים אורתוגונליים:

בעית אינטגרציה נומרית: למצוא קירוב $I(f)\coloneqq\int_a^b f(x)dx$ על סמך ערכי f ב-$x_0,\dots,x_k$: $\{f(x_i)\}_{i=1}^n$.

אם נשתמש בפולינום Lagrange: $p_k(x)=\sum_{i=0}^k f(x_i)l_i(x)$, מתקיים: $\int_a^b f(x)dx\cong\sum_{i=0}^k f(x_i)\int_a^b l_i(x)dx$ ועבור $w_i\coloneqq\int_a^b l_i(x)dx$:

$\boxed{\int_a^b f(x)dx\cong\sum_{i=0}^k w_i\cdot f(x_i)}$ כאשר w_i משקלות לא תלויות בערכי הפונקציה אלא רק בפיזור הנקודות $x_0,\dots,x_k$.

ביטוי לשגיאה: $\boxed{E(f)=\int_a^b f[x_0,\dots,x_k,x]\cdot\underbrace{\prod_{i=0}^k(x-x_o)}_{=\psi_k(x)}dx)}$

מקרים בהם ניתן לפשט את ביטוי השגיאה:

1. אם $\boldsymbol{\psi_k(x)}$ לא משנה סימן ב-$[\boldsymbol{a,b}]$: $\boxed{E(f)=\frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\int_a^b\psi_k(x)dx,\ \ \xi\in[a,b]}$

פשוט מוציאים את ההפרש המחולק מחוץ לאינטגרל. נובע ממשפט ערך הביניים לאינטגרלים: אם $h(x)\geq 0, g\in C[a,b]$, אז:

$\int_a^b g(x)h(x)dx=g(\eta)\int_a^b h(x)dx$. ומתקיים: $f[x_0,\dots,x_k,x]\in C[a,b]$ אם $f\in C^{k+1}[a,b]$.

הערה: במקרה זה אם $f\in\Pi_k$ אז $E(f)=0$.

2. אם $\int_a^b\boldsymbol{\psi_k(x)dx=0}$: $\boxed{E(f)=\int_a^b f[x_0,\dots,x_k,x_{k+1},x]\,\psi_{k+1}(x)dx}$

הערה: במקרה זה אם $f\in\Pi_{k+1}$ אז $E(f)=0$.

בניית נוסחת אינטגרציה מורכבת המבוססת על שיטת נקודת האמצע:

שיטת נקודת האמצע:

שיטת נקודת האמצע לאינטגרלים: $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$

עבור חלוקת קטע ל-$h=\frac{b-a}{N}$ מתקיים: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=h\sum_{i=0}^{N-1}f\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right)+\frac{b-a}{24}f''(\eta)h^2}$

שיטת הטרפז: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]-f''(\eta)\frac{(b-a)^3}{12}}$

שיטת Simpson:

עבור $k=2$ והנקודות $x_0=a,x_1=\frac{a+b}{2},x_2=b$: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{f^{(4)}(\eta)}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}$

השגיאה בשיטת Simpson: $\boxed{E(f)=-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5f^{(4)}(\eta)}$

שיטת טרפז מתוקנת:

עבור $k=3$ שימוש ב-$x_0=x_1=f(a),x_2=x_3=f(b)$ - ערכי f ו-f' ב-a,b:

הנוסחה: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{2}\underbrace{\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{N-1}f(ih)\right)}_{\text{טרפז מתוקן}}+\frac{h^2}{12}[f'(a)-f'(b)]+E(f)}$

השגיאה: $\boxed{E(f)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{720}h^2(b-a)}$

נוסחת Simpson מורכבת:

נוסחת סימפסון המורכבת: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{6}\left[f(a)+4f\left(a+\frac{h}{2}\right)+2f(a+h)+4f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+2f(a+2h)+\dots+f(b)\right]+E(f)}$

<u>השגיאה בנוסחת סימפסון המורכבת</u>: $\boxed{E(f) = \sum_{i=0}^{N-1} -\frac{\frac{1}{90}h^5}{2^5} \cdot f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{f^{(4)}(\eta)h^5}{90\cdot 32} \cdot \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} 1}_{=N=\frac{b-a}{h}} = -\frac{(b-a)h^4}{2880}}$

<u>הערה</u>: **עבור פונקציות מחזוריות השיטה הטובה ביותר היא לקחת מרווחים שווים ולהשתמש בשיטת הטרפז.**

<u>מכפלה פנימית עם משקל $w(x)$</u>:

מכפלה פנימית מעל $[a,b]$ עם משקל $w(x)$ ($w(x) > 0, x \in [a,b]$) עבור פונקציות $f,g \in C[a,b]$: $\boxed{< f,g >_w = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx}$

מתקיים: $\|f\|_w = \sqrt{< f,f >_w} > 0 \Leftrightarrow f \neq 0$

<u>פולינומים אורתוגונליים ביחס ל-$<\cdot,\cdot>_w$</u>:

תהי $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת פולינומים אורתוגונליים ביחס ל-$<\cdot,\cdot>_w$ המקיימת $< p_m, p_n >_w = h_m \cdot \delta_{m,n}$ ונניח כי יודעים את המומנטים של w:

$m_j = \int_a^b x^j w(x)dx$, נגדיר את הפולינום:

$$p_n = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ m_0 & m_1 & m_2 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix} \in \Pi_n$$

<u>>>> טענה</u>:

לכל $0 \le j \le n-1$ מתקיים $< p_n, x^j >_w = 0$, כלומר המערכת $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתוגונלית.

הוכחה:

$$< p_n, x^j >_w = \int_a^b \begin{vmatrix} 1 & \dots & x^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & \dots & m_{2n-1} \end{vmatrix} x^j w(x)dx = \begin{vmatrix} \int_a^b x^j w(x)dx & \dots & \int_a^b x^{j+n} w(x)dx \\ m_0 & \dots & m_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = 0$$

וזה בגלל שהשורה הראשונה שווה לשורה ה-$j+1$ ■

קירוב אינטגרלים מהצורה $\int_a^b w(x)f(x)dx$:

נקרב את $f(x)$ בעזרת פולינום אינטרפולציה $q_{n-1}(x)$ מעל $x_0, \dots, x_{n-1}$ ונקבל שגיאה: $E = \int_a^b f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \cdot \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}_{=C\cdot P_n(x)} w(x)dx$

נרצה לבחור נקודות אינטגרציה $x_0, \dots, x_{n-1}$ כך שהשגיאה תהיה 0 עבור $f \in \Pi_{2n-1}$.

<u>>>> טענה</u>:

אם $f \in \Pi_k$ אז $f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n}$

הוכחה: $\underbrace{f(x)}_{\in\Pi_k} - q_{n-1}(x) = f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \cdot \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)}_{\in\Pi_n} \Rightarrow if\ k \ge n: f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n}$ ■

<u>>>> טענה</u>:

אם נבחר את $x_0, \dots, x_{n-1}$ להיות שורשי P_n מתוך מערכת הפולינומים האורתוגונלים ביחס ל-$<\cdot,\cdot>_w$ אז $E = 0$ לכל $f \in \Pi_{2n-1}$.

הוכחה:

ברור כי עבור $f \in \Pi_{n-1}$ מתקיים $E = 0$. אם $k > n-1$ אז $f \in \Pi_k$ ונקבל $f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] \in \Pi_{k-n}$:

$n-1 < k \le 2n-1 \Rightarrow \boxed{0 \le k-n \le n-1}$ ולכן $\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i) = c \cdot P_n(x)$ אורתוגונלי ל-$f[x_0, \dots, x_{n-1}, x]$ ולכן $E = 0$ ■

<u>>>> טענה</u>:

אם p_n (הפולינום האורתוגונלי מהמערכת $\{p_n\}$) אורתוגונלי ל-$1, \dots, x^{n-1}$ אז כל שורשיו הפשוטים הם בקטע (a,b).

הוכחה:

נניח כי מספר השורשים של p_n בקטע קטן מ-n, ונסמן את שורשיו: $t_1, \dots, t_m$ כאשר $m < n$. בנקודות אלו p_n משנה סימן.

נגדיר: $q_m(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - t_i)$ ואז $p_n(x) \cdot q_m(x)$ לא משנה סימן ב-(a,b) ולכן $\int_a^b p_n(x)q_m(x)w(x)dx \neq 0$ כי p,q משנים סימן יחד בכל הנקודות t_i - סתירה לכך ש-p_n אורתוגונלי לכל הפולינומים ממעלה $n >$ $\Leftarrow$ p_n משנה סימן n פעמים ב-(a,b) ולכן יש לו n שורשים פשוטים בקטע. ■

<<< פיתוח נוסחת השגיאה באינטגרציה של גאוס:

עבור $\int_a^b w(x)f(x)dx$ כאשר מבצעים אינטרפולציה על f לפי שורשי הפולינום האורתוגונלי p_n (מעל $x_0,\dots,x_{n-1}$), נוסחת השגיאה היא:

$\boxed{E=\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\cdot\frac{h_n}{\alpha_n^2}}$ כאשר $h_n=\int_a^b\left(p_n(x)\right)^2w(x)dx$.

הוכחה:

נפתח את נוסחת השגיאה: $\int_a^b f[x_0,\dots,x_{n-1},x]\cdot\psi_{n-1}(x)w(x)dx$ כאשר $\psi_{n-1}(x)=\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$. נשים לב שמתקיים:

- $f[x_0,\dots,x_{n-1},x]=f[x_0,\dots,x_n]+f[x_0,\dots,x_n,x](x-x_n)$
- $\psi_{n-1}(x)=c\cdot p_n(x)$ ולכן $\int_a^b\psi_{n-1}(x)w(x)dx=0$

ומכאן: $E=\int_a^b f[x_0,\dots,x_n,x]\psi_{n-1}(x)(x-x_n)w(x)dx$. נמשיך בתהליך עד הוספת n נקודות: $x_n,\dots,x_{2n-1}$, ונבחר את הנקודות האלו לקיים $x_{n+j}=x_j, 0\le j\le n-1$ ונקבל: $E=\int_a^b f[x_0,\dots,x_{2n-1},x]\underbrace{\psi_{n-1}^2(x)}_{\text{לא משנה סימן בקטע}}w(x)dx$ וכיוון שרכיב זה לא משנה סימן בקטע:

$$E=f[x_0,\dots,x_{2n-1},\xi]\int_a^b\psi_{n-1}^2(x)w(x)dx=\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\cdot\int_a^b\left(c\cdot p_n(x)\right)^2w(x)dx$$

כאשר α_n הוא המקדם המוביל של p_n מתקיים: $x=\frac{1}{\alpha_n}$ ולכן $E=\frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\cdot\frac{h_n}{\alpha_n^2}$ כנדרש. ■

ספליינים – Splines:

בעית אינטרפולציה עם תנודות מינימליות:

נתונות נקודות $a=x_0\le\dots\le x_n\le b$ וערכים מתאימים f_i. נמצא $u(x), domain(u)=[a,b]$ כך ש:

- $I(u)\coloneqq\int_a^b\left(u^{(m)}(x)\right)^2dx$ מינימלי. I – פונקציונאל (פונקציה המוגדרת על פונקציות).
- $u(x_i)=f_i, i=0,\dots,n$

עבור $m=1$:

נחפש u שמקיימת:

1) יש לה שתי נגזרות רציפות בכל קטע $[x_i,x_{i+1}]$
2) $u(x_i)=f_i$ לכל $i=0,\dots,n$
3) נותנת ערך מינימלי ל-$I(u)=\int_a^b\left(u'(x)\right)^2dx$

עבור g בעלת שתי נגזרות רציפות בכל $[x_i,x_{i+1}]$ המקיימת $g(x_i)=0$ לכל $i=0,\dots,n$ ו-u כמוגדרת לעיל מתקיים:

- $I(u+g)\ge I(u)$
- $(u+g)(x_i)=f_i$

<u>הגדרה</u>: $\boxed{F(t)=I(u+tg)\ge I(u),\forall t\in\mathbb{R}}$ - ל-$F(t)$ מינימום ב-$t=0$. מתקיים מהגדרה: $F(t)=\int_a^b\left(u'(x)+tg'(x)\right)^2dx$.

<u>אפיון u</u>: u' אורתוגונלית ל-g' לכל g המקיימת $g(x_i)=0$ וחלקה מספיק, כלומר מתקיים: $\int_a^b u'(x)g'(x)dx=0$ לכל g כמוגדר קודם.

<<< טענה:

מאפיון u נובע כי בכל רווח (x_{i-1},x_i) עבור $i=1,\dots,n$ מתקיים: $u''(x)\equiv0$.

הוכחה

נניח כי $u''(x)\neq0$ ב-$x\in(x_{i-1},x_i)$, אז יש סביבה $(\bar{x}-\epsilon,\bar{x}+\epsilon)\subset(x_{i-1},x_i)$ בה $u''(x)$ לא משנה סימן.

נבחר $g\neq0$ המוגדרת מעל $(\bar{x}-\epsilon,\bar{x}+\epsilon)$ ומקבלת אותו סימן כמו u'' ונקבל $\sum_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}u''(x)g(x)dx>0$ - סתירה.

$\Leftarrow$ $u''\equiv0$ בכל (x_{i-1},x_i) ולכן u לינארית למקוטעין ■

<u>עבור $m = 2$</u>:

נחפש u שמקיימת:

1) $u^{(4)} \in C[x_{i-1}, x_i]$ לכל $i = 1, \dots, n$ - 4 נגזרות רציפות.
2) $u(x_i) = f_i$ לכל $i = 0, \dots, n$
3) נותנת ערך מינימלי ל-$I(u) = \int_a^b (u''(x))^2 dx$

גם כאן נעשה וריאציה על u שפותרת את הבעיה ע"י הוספת tg עבור g חלקה מספיק: $\boxed{F(t) = \int_a^b (u''(x) + tg''(x))^2 dx \geq F(0), \forall t \in \mathbb{R}}$

לכל g המקיימת את התנאים מתקיים: $\int_a^b u''(x)g''(x)dx = 0$

<u>האפיון של u</u>: $0 = \int_a^b u''(x)g''(x)dx = \dots = \sum_{i=0}^n \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} u^{(4)}(x)g(x)dx - u'''g|_{x_{i-1}}^{x_i} + u''(x_i^-)g'(x_i^-) - u''(x_{i-1}^+)g'(x_{i-1}^+)\right]$

כאשר x^- הוא גבול משמאל ו-x^+ הוא גבול מימין – וזה כיוון שלא ידוע ש-u גזירה בקצוות.

<u>טענה <<<</u>:

מאפיון u נובע ש-$u^{(4)} \equiv 0$ על כל (x_{i-1}, x_i), u'' רציפה על כל x ו-$u''(a) = u''(b) = 0$.

הוכחה:

נבחר g כך ש-$g(x_i) = 0$ ו-$g'(x_i) = 0$ לכל $i = 0, \dots, n$ וכמו קודם $g \neq 0$ רק באותו רווח שבו $u^{(4)}(x)$ לא משנה סימן.

תחילה נוכיח כי $u^{(4)}(x) = 0$ לכל $x \in (x_{i-1}, x_i)$: אם לא כך, אז קיים $\bar{x}$ ברווח כך ש-$u^{(4)}(\bar{x}) \neq 0$ ולכן קיימת סביבה $(\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$ בה $u^{(4)}$ לא משנה סימן, ונבחר g בעלת אותו סימן בסביבה זו ו-0 מחוץ לה. כמו קודם נקבל סתירה לכך שסכום האינטגרלים שווה ל-0.

כעת נשארנו עם: $\sum_{i=0}^n [u''(x_i^-)g'(x_i^-) - u''(x_{i-1}^+)g'(x_{i-1}^+)] = 0$. נבחר את g כך: $g \in C^1[a,b]$, $g(x_i) = 0$ לכל $i = 0, \dots, n$ ו-$g'(x_i) = 1$, $g'(x_j) = 0\ \forall j \neq i$. כך מהסכום לעיל ישאר: $0 = u''(x_i^-)\underbrace{g'(x_i^-)}_{=1} - u''(x_{i-1}^+)\underbrace{g'(x_{i-1}^+)}_{=1}$ ולכן u'' רציפה ב-x_i.

עבור $i = 0$: $g'(a) = 1$ ולכן $u''(a^+) = 0$ ומכאן: $u''(a) = 0$. באופן דומה $u''(b) = 0$. מכאן שכל התנאים שרצינו מתקיימים. ■

הפתרון ל-$m = 2$ הוא spline ממעלה 3 - פולינום ממעלה ≤ 3 על כל $[x_{i-1}, x_i]$ עבור $i = 1, \dots, n$ כשבחיבורים נגזרת שניה רציפה (cubic spline).

<u>המקרה הכללי – פונקצית spline ממעלה k</u>:

תהי $u \in S_k$ פונקצית spline ממעלה k עם צמתים $x_0, \dots, x_n$. u היא פולינום למקוטעין ממעלה k מעל כל $[x_{i-1}, x_i]$, כלומר: $u|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \Pi_k|_{[x_{i-1}, x_i]}$, עם חיבורים רציפים מסדר $k-1$ בצמתים: $u^{(j)}(x_i^+) = u^{(j)}(x_i^-)$, $0 \leq j \leq k-1$, $1 \leq i \leq n-1$.

במקרה של $m = 2$ (cubic spline) הדרישה $u''(a) = u''(b) = 0$ נובעת ממזעור $I(u)$, ואלה הם תנאי שפה טבעיים.

<u>מקדמים חופשיים</u>:

לכל קטע מ-n הקטעים פולינום ממעלה $\leq k$, לו יש $k + 1$ פרמטרים בכל צומת $x_1, \dots, x_{n-1}$ ($n - 1$ צמתים פנימיים) יש k תנאים של רציפות הנגזרות.

סה"כ: מקדמים חופשיים $n + k \Leftarrow$ $\begin{cases} n(k+1) = nk + n & \text{פרמטרים} \\ (n-1)k = nk - k & \text{תנאים} \end{cases}$ –

<u>הגדרה: פונקצית החזקה הקטועה</u>: $(x)_+^k := \begin{cases} x^k, x \geq 0 \\ 0, \quad x < 0 \end{cases}$

<u>$\dim(S_k) = n + k$</u>:

הבסיס בקטע הראשון הוא $\{1, x, \dots, x^k\}$ ו-$\dots + \underbrace{d_1(x - x_1)_+^k}_{\in S_k} + p_1(x) = \sum_{j=0}^k c_j x^j$.

בסיס ל-S_k יהיה: $\{1, x, \dots, x^k\} \cup \{(x - x_i)_+^k\}_{i=1}^{n-1}$ - מספר האיברים בבסיס הוא: $n + k = (k+1) + (n-1)$, כנדרש.

<u>B-splines</u>:

S_k הוא מרחב הספליינים ממעלה k על צמתים $x_0, \dots, x_n$ ועל כל $[x_{i-1}, x_i]$ $s \in S_k$ הוא פולינום ממעלה $\leq k$ ו-$s \in C^{n-1}[x_0, x_1]$

בסיס החזקות הקטועות ל-S_k: $\boxed{\{1, x, x^2, \dots, x^k\} \cup \{(x - x_i)_+^k\}_{i=1}^{n-1}}$, $(x)_+^k = \begin{cases} x^k, x \geq 0 \\ 0, \quad \text{אחרת} \end{cases}$ ומימד המרחב הוא $n + k$.

ספליין טבעי ממעלה 3 פותר את בעיית האינטרפולציה ב-$x_0, \dots, x_n$ ומינימיזציה של $\int_{x_0=a}^{x_n=b} (u''(x))^2 dx$ כאשר $u''(a) = u''(b) = 0$, $u \in S_3$.

B-Splines:

בסיס B-Splines ל-S_k:

<u>הגדרה</u>: $\boxed{B_i^{(k)}(x) := (\cdot - x)_+^k\left[x_{i-m_1}, x_{i-m_1+1}, \dots, x_{i+m_2}\right]\left(x_{i+m_2} - x_{i-m_1}\right)}$ (האיבר הראשון הוא הפרש מחולק של הפוני' $(\cdot - x)_+^k$).

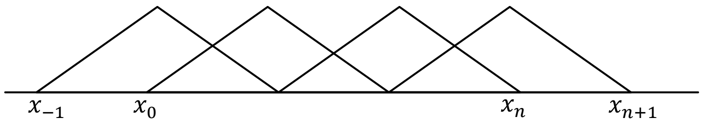
- אם $k = 2m$: $m_1 = m, m_2 = m + 1$
- אם $k = 2m - 1$: $m_1 = m_2 = m$

כאשר $(\cdot - x)_+^k(y) = (y - x)_+^k$.

$S_1 - k = 1$:

$$B_i^{(1)}(x) = (\cdot - x)_+^1[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}](x_{i+1} - x_{i-1}) = (\cdot - x)_+^k[x_i, x_{i+1}] - (\cdot - x)_+^k[x_{i-1}, x_i] = \underbrace{\frac{(x_{i+1}-x)_+^k - (x_i - x)_+^k}{x_{i+1} - x_i}}_{\varphi_i(x)=} - \underbrace{\frac{(x_i - x)_+^k - (x_{i-1} - x)_+^k}{x_i - x_{i-1}}}_{\varphi_{i-1}(x)=}$$

מוסיפים צמתים פיקטיביים להגדרת בסיס שלם של S_1: x_{-1}, x_{n+1} ומקבלים את הבסיס: $\left\{B_i^{(1)}(x)\right\}_{i=0}^n$ בו יש $n + k = n + 1$ איברים.



<u>**>>> טענה**</u>:

א) ל-$B_i^{(k)}$ תומך סופי $\left(x_{i-m_1}, x_{i+m_2}\right)$

ב) $B_i^{(k)} > 0$ בקטע $\left(x_{i-m_1}, x_{i+m_2}\right)$

ג) $\sum_{i=-m_2+1}^{n+m_1-1} B_i^{(k)}(x) = 1$

הוכחה:

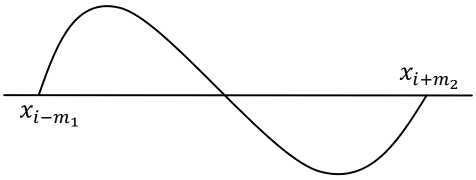
א) $B_i^{(k)}(x) = \underbrace{(\cdot - x)_+^k\left[\overbrace{x_{i-m_1+1}, \dots, x_{i+m_2}}^{k+1 \text{ פעמים}}\right]}_{\varphi_i(x)} - \underbrace{(\cdot - x)_+^k\left[\overbrace{x_{i-m_1}, \dots, x_{i+m_2-1}}^{k+1 \text{ פעמים}}\right]}_{\varphi_{i-1}(x)}$. תכונות $\varphi_i(x)$:

1. $\varphi_i(x) = 0$ אם $x > x_{i+m_2}$
2. $\varphi_i(x) = 1$ אם $x < x_{i-m_1+1}$ - בתחום זה φ_i הוא הפרש מחולק מסדר k של $(\cdot - x)_+^k$ ולכן שווה ל-1, כי זו הנגזרת ה-k $= k!$ מחולק ב-$k!$.

סה"כ: $\varphi_i, \varphi_{i+1} \equiv 0$ עבור $x > x_{i+m_2}$ ו-$\varphi_i, \varphi_{i-1} \equiv 1$ עבור $x < x_{i-m_1}$ ולכן ההפרש ביניהן שונה מ-0 רק ברווח $\left[x_{i-m_1}, x_{i+m_2}\right]$.

ג) $\begin{cases} \varphi_{-m_2}(x) = 0 \text{ אם } x > x_0 \\ \varphi_{n+m_1-1}(x) = 1 \text{ אם } x \le x_n \end{cases}$ - $1 \underset{x\in[a,b]}{=} \varphi_{n+m_1-1}(x) - \varphi_{-m_2}(x) \underset{\text{טלסקופי}}{=} \sum\left(\varphi_i(x) - \varphi_{i-1}(x)\right) = \sum_{i=-m_2+1}^{n+m_1-1} B_i^{(k)}(x)$

ב) נניח ש-$B_i^{(k)}$ מתאפס בנקודה בקטע $\left(x_{i-m_1}, x_{i+m_2}\right)$, אז יש שני אפסים לנגזרת הראשונה, שלושה לשניה וכן הלאה עד k אפסים לנגזרת ה-$k - 1$.



ספליין ממעלה 1 (הנגזרת ה-$k - 1$ של $B_i^{(k)}$) הוא אפס זהותי אם יש לו k אפסים פנימיים.

■

$S_3 - k = 3$:

עבור נקודות במרווחים שווים $x_i = ih$ הבסיס ל-S_3 הוא $\left\{B_{-1}^{(3)}, \dots, B_{n+1}^{(3)}\right\}$ – $n + 3$ איברי בסיס, לכולם תומך החותך את $[0, nh]$. הצגת פולינום כללית $s \in S_3$: $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} q_i B_i^{(3)}(x)$.

<u>**פתרון בעית אינטרפולציה ב-$x_0, \dots, x_n$ בעזרת B-Splines**</u>:

נמצא $s(x)$ המקיים $s(x_i) = f(x_i)$ לכל $i = 0, \dots, n$ ומקיים תנאי שפה $s''(0) = s''(nh) = 0$. הנעלמים הם: $\{q_i\}_{i=-1}^{n+1}$

עבור: $s(ih) = \sum_{j=-1}^{n+1} q_j B_j^{(3)}(ih) = f(ih)$

אם $|i-j|>1$ אז $B_j^{(3)}(ih)=0$

על אלכסון המטריצה: $B_j^{(3)}(x) = B_2^{(3)}(x-(j-2)h)$ (מופיע בדף הנוסחאות) ומכאן: $B_i^{(3)}(ih) = B_2^{(3)}(ih-(i-2)h) = B_2^{(3)}(2h) = \frac{2}{3}$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{j-1} \\ q_j \\ q_{j+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

חישוב התרומה למערכת המשוואות מהתנאי $s''(0)=0$:

$$\begin{cases} {B_2^{(3)}}''(h) = \frac{1}{h^2} \\ {B_2^{(3)}}''(2h) = -\frac{2}{h^2} \Rightarrow q_{-1}\cdot\frac{1}{h^2} + q_0\cdot\left(-\frac{2}{h^2}\right) + q_1\cdot\frac{1}{h^2} = 0 \\ {B_3^{(3)}}''(2h) = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

<u>אופטימליות של Spline ממעלה 3</u>:

יהי $s\in S_3$ עם צמתים $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$ ונניח f'' רציפה ו-$f(x_i)=s(x_i)$ לכל $i=0,\dots,n$.

$$\int_a^b (f''(x))^2dx - \int_a^b (s''(x))^2dx = \int_a^b (f''-s'')^2dx + 2\int_a^b s''\cdot(f''-s'')dx \underset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=}$$

$$= 2\sum_{(i=1)}^{n-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} s'''[f'-s']dx\right] + 2s''(f'-s')|_a^b + \int_a^b (f''-s'')^2dx \underset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=}$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n-1}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \underbrace{s^{(4)}}_{\substack{\text{כי על כל קטע זה} \\ \text{פולינום ממעלה 3}}} [f-s]dx - s''' \underbrace{(f-s)}_{\substack{=0 \\ f(x_i)=s(x_i) \text{ כי}}} |_{x_{i-1}}^{x_i}\right] + 2s''(x)(f'-s')|_a^b + \int_a^b \underbrace{(f''-s'')^2}_{\geq 0}dx$$

ומכאן ש-/אי שלילי + $\int_a^b (f'')^2 - \int_a^b (s'')^2 = s''(f'-s')|_a^b$

<u>מסקנה</u>: מבין כל הפונקציות עם נגזרת שניה רציפה שמקיימות תנאי אינטרפולציה ב-$\{x_i\}_{i=0}^n$, ה-spline הטבעי אופטימלי מבחינת מינימום ל-$\int_a^b (s'')^2$, וגם ה-spline שמתלכד עם ערכי הנגזרת בקצוות הוא אופטימלי.

<u>מערכת משוואות עם יותר משוואות מנעלמים</u>:

<u>הבעיה</u>: למצוא x כך ש-$\|Ax-b\|_2 \to min$, כאשר $\forall x\in\mathbb{R}^n: \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^tx}$.

<u>טענה >>></u>:

הפתרון x שמביא למינימום את $\|Ax-b\|_2$ הוא אותו x הפותר את $A^t\underbrace{(Ax-b)}_{\text{וקטור השגיאות}} = 0 \Leftrightarrow A^tAx = A^tb$ (וקטור השגיאות מאונך לעמודות A).

הוכחה:

$$\|Ay-b\|_2^2 = (Ay-b)^t(Ay-b) = (Ay-Ax+Ax-b)^t(Ay-Ax+Ax-b) =$$

$$\underbrace{\|Ay-Ax\|_2^2}_{\geq 0} + \|Ax-b\|_2^2 + 2\underbrace{(Ay-Ax)^t(Ax-b)}_{=(y-x)\underbrace{A^t(Ax-b)}_{=0}}$$

ולכן לכל y: $\|Ay-b\|_2^2 \geq \|Ax-b\|_2^2$ ■

<u>מתי קיים פתרון ל-$A^tAx=A^tb$</u>: צריך ש-A^tA תהיה רגולרית (הפיכה). תנאי מספיק והכרחי – הדרגה של A שווה למספר העמודות שלה.

Splines – קירוב ריבועים מינימלי – Least-Squares:

נניח נתונים $t_j \in [0,nh]$, $\{f(t_j)\}_{j=1}^{M}$, $M \gg n$.

מחפשים spline ממעלה 3 $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i^{(3)}(x)$ כך ש: $\sum_{j=1}^{M}\left(s(t_j)-f(t_j)\right)^2 \to min$

ניצור מערכת של M משוואות עבור $n+3$ נעלמים $\{c_i\}_{i=-1}^{n+1}$: $\sum_{i=-1}^{n+1} \underbrace{c_i B_i^{(3)}(t_j)}_{s(t_j)} \cong f(t_j)$ - במטריצה A: בשורה j בעמודה i נמצא $B_i^{(3)}(t_j)$