המשך שיטות איטרטיביות לפתרון מערכות לינאריות:

ראינו דוגמאות שונות להגיע ל-B ב:

$$Ax = b \Rightarrow x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + c$$

נחפש G (פשוטה – שקל לחשבה עבור A) ולא סינגולרית ונגדיר:

$$B = I - GA, c = Gb \Rightarrow \quad x = Bx + c = (I - GA)x + Gb = x - G(Ax - b)$$

ואז אם $Ax = b$ אז $x = Bx + c$ וגם ההיפך נכון כי G הפיכה.

<u>דוגמאות</u>:

1) <u>שיטת Jacobi</u>: $G = D^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & & U \\ & D & \\ L & & \ddots \end{bmatrix} = L + D + U$$

$$G = D^{-1} \Rightarrow x = (\underbrace{I - D^{-1}A}_{B})x + D^{-1}b, \quad \|B\| = \|I - GA\|$$

(רוצים שנורמת B תהיה קטנה מ-1 כתנאי להתכנסות)

2) <u>שיטת Gauss-Seidel</u>: $G = (L + D)^{-1}$

$$(L + D)^{-1} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ & D & \ddots \\ L & & \ddots \end{bmatrix}^{-1}$$

הפיכת מטריצה זו גם קלה (או לחילופין כל האיברים מתחת לאלכסון הם 0).

3) <u>דוגמא לא טרוויאלית</u>:

אם נתונה לנו מטריצה עם אלכסון לא דומיננטי, כעקרון לא תהיה התכנסות. ניתן לפעול באופן הבא:

בבלוק השמאלי עליון האלכסון לא דומיננטי. נבצע את החישוב לפי השיטה הכללית לעיל:

$$G = \begin{bmatrix} \color{red}{4} & \color{red}{5} & & & & \\ \color{red}{1} & \color{red}{4} & & & 0 & \\ & & \frac{1}{3} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & 0 & & & \frac{1}{3} & \\ & & & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad B = I - GA = I - \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & & 1 & -\frac{1}{2} & \\ & 0 & & -\frac{1}{3} & 1 & \\ & & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & \frac{2}{3} & & \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & \\ & & & \frac{1}{3} & 0 & \\ & & & & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

במקום לקחת את G^{-1} לוקחים את הבלוק המסומן באדום בלבד בחזקת -1.

קירוב נגזרות של פונקציה:

נתונה הפונקציה f בנקודות $x_0,\dots,x_k$ ורוצים לקרב את $f'(x)$. נמצא את $p_k(x)$ פולינום האינטרפולציה ב-$x_0,\dots,x_k$ וידוע:

$f(x)=p_k(x)+f[x_0,\dots,x_k,x]\cdot\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)$ - כעת גוזרים את שני האגפים

$[\psi_k(x)\coloneqq\prod_{i=0}^{k}(x-x_i)]$

$$f'(x)=\underbrace{p_k'(x)}_{\text{קירוב לנגזרת}}+\frac{d}{dx}f[x_0,\dots,x_k,x]\cdot\psi_k(x)+\underbrace{f[x_0,\dots,x_k,x]}_{=\frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}}\cdot\psi_k'(x)$$

טענה:

$$\boxed{\frac{d}{dx}f[x_0,\dots,x_k,x]=f[x_0,\dots,x_k,x,x]}$$

נתקלנו בחזרת x_i בהפרש מחולק כאשר נתונה אינטרפולציה של פונקציה ונגזרות שלה.

נראה דוגמא שבה זה נכון:

$$\frac{d}{dx}f[x_0,x]=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=\frac{f'(x)(x-x_0)-\big(f(x)-f(x_0)\big)}{(x-x_0)^2}\overset{?}{=}f[x_0,x,x]$$

$$\begin{cases}x_0\\x\\x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(x_0)\\f(x)\\f(x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f[x_0,x]=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\f[x,x]=f'(x)\end{cases}\Rightarrow f[x_0,x,x]=\frac{f'(x)-\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{x-x_0}=\frac{f'(x)(x-x_0)-\big(f(x)-f(x_0)\big)}{(x-x_0)^2}$$

וראינו שאכן קיבלנו את אותו ביטוי. קל להוכיח באינדוקציה את הטענה □

$$f[x_0,\dots,x_k,x,x]=\frac{f^{(k+2)}(\xi_x)}{(k+2)!}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=p_k'(x)+E(x),\quad\boxed{E(x)=\frac{f^{(k+2)}(\xi_x)}{(k+2)!}\cdot\psi_k(x)+\frac{f^{(k+1)}(\eta_x)}{(k+1)!}\cdot\psi_k'(x)}$$

<u>דוגמאות</u>:

1) <u>עבור $k=1$</u>:

$$x_0,x_1\quad f'(x)=p'_1(x)+\frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}\cdot(x-x_0)(x-x_1)+\frac{f^{(2)}(\eta_x)}{2!}\cdot\big((x-x_0)(x-x_1)\big)'$$

כאן הקירוב ברור, כי הנגזרת היא פשוט שיפוע קו ישר אך חשוב לבדוק את איבר השגיאה:

$$f'(x)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+\frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)+\frac{f^{(2)}(\eta_x)}{2}(2x-x_0-x_1)$$

2) <u>חוק שני של ניוטון</u>: $ma=f$

מרחק: $y(t)$, מהירות: $y'(t)$, תאוצה: $a=y''(t)$

$ma=f\Rightarrow my''(t)=f(t)$

זו משוואה דיפרנציאלית ורוצים למצוא את מיקום הגוף לכל t בהינתן תנאי התחלה $y(0)=y_0,y'(0)=v_0$, ומחפשים את המסלול $y(t)$ בהינתן הכח $f(t)$. כיצד פותרים:

מחלקים רווח $[0,T]$ לקטעים באורך h ונקרב את הנגזרת השניה ונקבל קירוב למשוואה הדיפרנציאלית. נרצה שהמרחק h בין הנקודות יהיה קטן, אך עם שגיאה לא גדולה מידי. אם בקטע יהיו $\frac{T}{h}$ קטעים, השגיאה מכל קטע מצטברת. לכן נרצה h קטן וסדר קירוב גבוה ב-h.

נניח $x_1-x_0=h$ ו-$x\in[x_0,x_1]$. אז $(x-x_0)(x-x_1)=O(h)\cdot O(h)=O(h^2)$ (כי כל אחד מהאיברי סבמכפלה ניתנים לחסימה ע"י h). לגבי $(2x-x_0-x_1)=(x-x_0)+(x-x_1)$ וזה $O(h)$ מלבד המקרה המיוחד בו x נמצא באמצע הקטע כאשר $x=\frac{x_0+x_1}{2}\Rightarrow 2x-x_0-x_1=0$ ואז השגיאה היא $O(h^2)$ כי החלק השני שהוא כעת 0 נופל. נקבל במפורש:

$$f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}+\frac{f^{(3)}(\xi_x)}{6}\cdot\frac{h}{2}\cdot\left(-\frac{h}{2}\right)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}-\frac{f^{(3)}(\xi_x)}{24}h^2$$

וזו השגיאה בקירוב לנגזרת הראשונה ע"י נקודות במרחק שווה מהנקודה בה גוזרים, כלומר באמצע הקטע בין x_0,x_1.

<u>הערה</u>: אם הנקודה לא היתה באמצע הקטע, האיבר הנוסף (עם הנגזרת ה-2) לא היה מתאפס והיינו מקבלים שגיאה בס״ג של $O(h)$ ולא $O(h^2)$.

3) <u>עבור $k=2$</u>:

$$p_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)\Rightarrow$$

$$p_2'(x)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x_2](2x-x_0-x_1)\Rightarrow\quad E(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\frac{f^{(3)}(\eta_x)}{3!}\psi_2'(x)$$

נקח את הנקודות $x_0=a, x_1=a+h, x_2=a+2h$ ונבחן את הקירוב ב-$x=a$:

$$f'(a)=\underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{=f[x_0,x_1]}-\underbrace{\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{2h}}_{=f[a,a+h,a+2h]\cdot\underbrace{(2a-a-(a+h))}_{=-h}}+E(x)$$

$$\begin{cases}a\\a+h\\a+2h\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\\[2ex]\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2h^2}\big(f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)\big)$$

$$\boxed{p_2'(a)=\frac{-3f(a)+4f(a+h)-f(a+2h)}{2h}},\qquad E(x)=\frac{f^{(3)}(\eta_x)}{3!}\cdot 2h^2=\frac{f^{(3)}(\eta_x)}{3}\cdot h^2$$

וגם פה קיבלנו טעות של $O(h^2)$.

לקירוב נגזרת שניה של f:

$$f(x)=p_k(x)+\psi_k(x)f[x_o,\dots,x_k,x]\Rightarrow$$

$$f''(x)=\underbrace{\boxed{p_k''(x)}}_{\text{קירוב}}+\underbrace{\boxed{\underbrace{\psi_k(x)\cdot f[x_0,\dots,x_k,x,x,x]}_{\text{בגלל שגוזרים פעמיים}}+2\psi_k'(x)f[x_0,\dots,x_k,x,x]+\psi_k''(x)f[x_0,\dots,x_k,x]}}_{\text{איבר השגיאה}}$$

שיטה II למציאת קירובים לנגזרת:

בדוגמא הקודמת מצאנו קירוב מדוייק לפולינום ממעלה 2 כיוון שאז השגיאה היא 0 – כי הנגזרת השלישית לפולינום ממעלה 2 היא 0; כמו כן למקרה הקודם של הקירוב בנקודת האמצע זה המקרה. על בסיס עובדה זו ניתן לקרב באופן ישיר בשיטה הבאה.

<u>תרגיל</u>: מצא קירוב לנגזרת $f'(a)$ תוך שימוש ב-$f(a), f(a+h), f(a+2h)$. \

נעשה פיתוח טיילור:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2}f''(a)+\frac{h^3}{6}f^{(3)}(\tau_1)\quad\cdot\quad A$$

$$f(a+2h)=f(a)+2hf'(a)+\frac{4h^2}{2}f''(a)+\frac{8h^3}{6}f^{(3)}(\tau_2)\quad\cdot\quad B$$

מכפילים ב-A,B כדי להפטר מכמה יותר חזקות של h. ע״י ההכפלה נוכל אולי בקומבינציה לינארית להפטר מאיברים, למשל כאן $A=4, B=-1$.

נחבר את המשוואות ונקבל:

$$4f(a+h)-f(a+2h)=3f(a)+2hf'(a)+\left\{\frac{2}{3}f^{(3)}(\tau_1)-\frac{4}{3}f^{(3)}(\tau_2)\right\}h^3\Rightarrow$$

$$f'(a)=\frac{-3f(a)+4f(a+h)-f(a+2h)}{2h}-\left\{\frac{1}{3}f^{(3)}(\tau_1)-\frac{2}{3}f^{(3)}(\tau_2)\right\}h^2$$

אם נשווה למה שקיבלנו קודם, קיבלנו את אותה נוסחה ועם שגיאה דומה. כיצד מראים ש: $\frac{1}{3}f^{(3)}(\tau_1)-\frac{2}{3}f^{(3)}(\tau_2)=\frac{1}{3}f^{(3)}(\eta)$:

לפי משפט ערך הביניים...

מה צריך לבצע אם רוצים פיתוח מסדר גבוה יותר עם נקודה נוספת $f(a+3h)$: שאלה טובה.

<u>דוגמא שניה</u>: מצא קירוב ל-$f''(a)$ בעזרת $f(a-h), f(a), f(a+h)$:

שוב נעשה פיתוח טיילור:

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\tau_1) \quad +$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\tau_2)$$

$$\Rightarrow f(a-h) + f(a+h) = 2f(a) + h^2 f''(a) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(\tau)$$

כאשר לפי משפט ערך ביניים מקבלים את τ. מכאן הקירוב לנגזרת השנייה:

$$\boxed{f''(a) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\tau)}$$

נניח $y''(t) = \frac{1}{m}k(t)$, נבחר $t_i = ih$:

$$y''(ih) = \frac{y\big((i-1)h\big) - 2y(ih) + y\big((i+1)h\big)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{y\big((i-1)h\big) - 2y(ih) + y\big((i+1)h\big)}{h^2} = \frac{1}{m}k(ih) + O(h^2)$$

נניח שנתונים תנאי שפה, למשל $y(0) = y_0, y(nh) = y_n$ (מיקום בנקודת התחלה וסוף). כמו כן נסמן $y_i = \tilde{y}(ih)$:

המשוואה עבור המקרה $i = 1$: $y_0 - 2y_1 + y_2 = \frac{h^2}{m}k(h) + O(h^2)$

המשוואה עבור המקרה $i = 2$: $y_1 - 2y_2 + y_3 = \frac{h^2}{m}k(2h) + O(h^2)$

...

המשוואה עבור $n-1$: $y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n = \frac{h^2}{m}k\big((n-1)h\big) + O(h^2)$

ניתן לסדר את התוצאות במטריצה:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \\ \vdots \\ \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{h^2}{m} \begin{bmatrix} -y_0 + k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-2} \\ -y_n + k_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad k_i \coloneqq k(ih)$$