

קירוב נגזרות של פונקציה:

נתונה הפונקציה f בנקודות x_0, \dots, x_k ורוצים לקרב את $f'(x)$. נמצא את $p_k(x)$ פולינום האינטרפולציה ב- x_0, \dots, x_k וידוע:

$$f(x) = p_k(x) + f[x_0, \dots, x_k, x] \cdot \prod_{i=0}^k (x - x_i)$$

$$[\psi_k(x) := \prod_{i=0}^k (x - x_i)]$$

$$f'(x) = p'_k(x) + \frac{d}{dx} f[x_0, \dots, x_k, x] \cdot \psi_k(x) + \underbrace{f[x_0, \dots, x_k, x]}_{=\frac{f^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!}} \cdot \psi'_k(x)$$

טענה:

$$\boxed{\frac{d}{dx} f[x_0, \dots, x_k, x] = f[x_0, \dots, x_k, x]}$$

נתקלנו בחזרת x_i בהפרש מחולק כאשר נתונה אינטרפולציה של פונקציה ונגזרות שלה.

נראה דוגמא שבה זה נכון:

$$\frac{d}{dx} f[x_0, x] = \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} \stackrel{?}{=} f[x_0, x, x]$$

$$\begin{matrix} x_0 \\ x \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} f(x_0) \\ f(x) \\ f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f[x_0, x] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ f[x, x] = f'(x) \end{cases} \Rightarrow f[x_0, x, x] = \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{x - x_0} = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2}$$

וראינו שאכן קיבלנו את אותו ביטוי. קל להוכיח באינדוקציה את הטענה □

$$f[x_0, \dots, x_k, x, x] = \frac{f^{(k+2)}(\xi_x)}{(k+2)!} \Rightarrow f'(x) = p'_k(x) + E(x), \quad \boxed{E(x) = \frac{f^{(k+2)}(\xi_x)}{(k+2)!} \cdot \psi_k(x) + \frac{f^{(k+1)}(\eta_x)}{(k+1)!} \cdot \psi'_k(x)}$$

דוגמאות:

(1) עבור $k = 1$:

$$x_0, x_1 \quad f'(x) = p'_1(x) + \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \frac{f^{(2)}(\eta_x)}{2!} \cdot ((x - x_0)(x - x_1))'$$

כאן הקירוב ברור, כי הנגזרת היא פשוט שיפוע קו ישר אך חשוב לבדוק את איבר השגיאה:

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{f^{(2)}(\eta_x)}{2} (2x - x_0 - x_1)$$

(2) חוק שני של ניוטון: $ma = f$

מרחק: $y(t)$, מהירות: $y'(t)$, תאוצה: $y''(t) = a$

$$ma = f \Rightarrow my''(t) = f(t)$$

זו משוואה דיפרנציאלית ורוצים למצוא את מיקום הגוף לכל t בהינתן תנאי התחלה $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$, ומחפשים את המסלול $y(t)$ בהינתן

הכח $f(t)$. כיצד פותרים:

מחלקים רווח $[0, T]$ לקטעים באורך h ונקרב את הנגזרת השניה ונקבל קירוב למשוואה הדיפרנציאלית. נרצה שהמרחק h בין הנקודות יהיה קטן, אך

עם שגיאה לא גדולה מידי. אם בקטע יהיו $\frac{T}{h}$ קטעים, השגיאה מכל קטע מצטברת. לכן נרצה h קטן וסדר קירוב גבוה ב- h .

נניח $x_1 - x_0 = h$ ו- $x \in [x_0, x_1]$ אז $(x - x_0)(x - x_1) = O(h) \cdot O(h) = O(h^2)$ (כי כל אחד מהאיברי סבמכפלה ניתנים לחסימה ע"י h). לגבי

$$(2x - x_0 - x_1) = (x - x_0) + (x - x_1) \quad \text{וזה } O(h) \text{ מלבד המקרה המיוחד בו } x \text{ נמצא באמצע הקטע כאשר } x = \frac{x_0 + x_1}{2} \Rightarrow 2x - x_0 - x_1 = 0 \text{ ואז}$$

השגיאה היא $O(h^2)$ כי החלק השני שהוא כעת 0 נופל. נקבל במפורש:

$$f' \left(\frac{x_0 + x_1}{2} \right) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{6} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left(-\frac{h}{2} \right) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} - \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{24} h^2$$

וזו השגיאה בקירוב לנגזרת הראשונה ע"י נקודות במרחק שווה מהנקודה בה גוזרים, כלומר באמצע הקטע בין x_0, x_1 .

הערה: אם הנקודה לא היתה באמצע הקטע, האיבר הנוסף (עם הנגזרת ה-2) לא היה מתאפס והיינו מקבלים שגיאה בסייג של $O(h)$ ולא $O(h^2)$.
 (3) עבור $k = 2$:

$$p_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \Rightarrow$$

$$p_2'(x) = f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](2x - x_0 - x_1) \Rightarrow E(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \frac{f^{(3)}(\eta_x)}{3!}\psi_2'(x)$$

נקח את הנקודות $x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h$ ונבחן את הקירוב ב- $x = a$:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h} + E(x)$$

$=f[x_0, x_1]$ $=f[a, a+h, a+2h] \cdot (2a - a - (a+h)) = -h$

$$\begin{cases} a \\ a+h \\ a+2h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2h^2}(f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a))$$

$$\boxed{p_2'(a) = \frac{-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)}{2h}}, \quad E(x) = \frac{f^{(3)}(\eta_x)}{3!} \cdot 2h^2 = \frac{f^{(3)}(\eta_x)}{3} \cdot h^2$$

וגם פה קיבלנו טעות של $O(h^2)$.
 לקירוב נגזרת שניה של f :

$$f(x) = p_k(x) + \psi_k(x)f[x_0, \dots, x_k, x] \Rightarrow$$

$$f''(x) = \underbrace{p_k''(x)}_{\text{קירוב}} + \underbrace{\psi_k(x) \cdot f[x_0, \dots, x_k, x, x] + 2\psi_k'(x)f[x_0, \dots, x_k, x, x] + \psi_k''(x)f[x_0, \dots, x_k, x]}_{\text{איבר השגיאה בגלל שגזורים פעמיים}}$$

שיטה II למציאת קירובים לנגזרת:

בדוגמה הקודמת מצאנו קירוב מדוייק לפולינום ממעלה 2 כיוון שאז השגיאה היא 0 - כי הנגזרת השלישית לפולינום ממעלה 2 היא 0; כמו כן למקרה הקודם של הקירוב בנקודות האמצע זה המקרה. על בסיס עובדה זו ניתן לקרב באופן ישיר בשיטה הבאה.

תרגיל: מצא קירוב לנגזרת $f'(a)$ תוך שימוש ב- $f(a), f(a+h), f(a+2h)$.
 נעשה פיתוח טיילור:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(\tau_1) \cdot A$$

$$f(a+2h) = f(a) + 2hf'(a) + \frac{4h^2}{2}f''(a) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(\tau_2) \cdot B$$

מכפילים ב- A, B כדי להפטר מכמה יותר חזקות של h . ע"י ההכפלה נוכל אולי בקומבינציה לינארית להפטר מאיברים, למשל כאן $A = 4, B = -1$.
 נחבר את המשוואות ונקבל:

$$4f(a+h) - f(a+2h) = 3f(a) + 2hf'(a) + \left\{ \frac{2}{3}f^{(3)}(\tau_1) - \frac{4}{3}f^{(3)}(\tau_2) \right\} h^3 \Rightarrow$$

$$f'(a) = \frac{-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)}{2h} - \left\{ \frac{1}{3}f^{(3)}(\tau_1) - \frac{2}{3}f^{(3)}(\tau_2) \right\} h^2$$

אם נשווה למה שקיבלנו קודם, קיבלנו את אותה נוסחה ועם שגיאה דומה. כיצד מראים ש: $\frac{1}{3}f^{(3)}(\tau_1) - \frac{2}{3}f^{(3)}(\tau_2) = \frac{1}{3}f^{(3)}(\eta)$.
 לפי משפט ערך הביניים...

מה צריך לבצע אם רוצים פיתוח מסדר גבוה יותר עם נקודה נוספת $f(a+3h)$: שאלה טובה.

דוגמה שניה: מצא קירוב ל- $f''(a)$ בעזרת $f(a-h), f(a), f(a+h)$:
שוב נעשה פיתוח טיילור:

$$f(a-h) = f(a) - hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\tau_1) +$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(a) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\tau_2)$$

$$\Rightarrow f(a-h) + f(a+h) = 2f(a) + h^2f''(a) + \frac{h^4}{12}f^{(4)}(\tau)$$

כאשר לפי משפט ערך ביניים מקבלים את τ . מכאן הקירוב לנגזרת השנייה:

$$f''(a) = \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\tau)$$

נניח $y''(t) = \frac{1}{m}k(t)$, נבחר $t_i = ih$:

$$y''(ih) = \frac{y((i-1)h) - 2y(ih) + y((i+1)h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{y((i-1)h) - 2y(ih) + y((i+1)h)}{h^2} = \frac{1}{m}k(ih) + O(h^2)$$

נניח שנתונים תנאי שפה, למשל $y(0) = y_0, y(nh) = y_n$ (מיקום בנקודת התחלה וסוף). כמו כן נסמן $\tilde{y}_i = y_i$:

$$y_0 - 2y_1 + y_2 = \frac{h^2}{m}k(h) + O(h^2) : i = 1$$
 המשוואה עבור המקרה

$$y_1 - 2y_2 + y_3 = \frac{h^2}{m}k(2h) + O(h^2) : i = 2$$
 המשוואה עבור המקרה

...

$$y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n = \frac{h^2}{m}k((n-1)h) + O(h^2) : n-1$$
 המשוואה עבור

ניתן לסדר את התוצאות במטריצה:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{h^2}{m} \begin{bmatrix} -y_0 + k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{n-2} \\ -y_n + k_{n-1} \end{bmatrix}, \quad k_i := k(ih)$$