

אנליזה נומרית / תרגיל בית #6

אריאל סטולרמן

(1)

$$f(x) = x^3 - 3x + 2, r \in [-3, -1]$$

א. נחשב את f בקצוות:

$$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 2 = -27 + 9 + 2 = -16 < 0$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4 > 0$$

כיוון ש- f רציפה בקטע, לפי משפט ערך הביניים ל- f יש שורש בקטע $[-3, -1]$.ב. מציאת r בצורה אנליטית:

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - 4x + x + 2 = x(x^2 - 4) + (x + 2) = x(x + 2)(x - 2) + (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 1) = (x + 2)(x - 1)^2$$

מכאן בתחום $[-3, -1]$ השורש המבוקש הוא $r = -2$.ג. איטרצית ניוטון: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 2}{3x_k^2 - 3} = \frac{3x_k^3 - 3x_k - x_k^3 + 3x_k - 2}{3x_k^2 - 3} = \frac{2x_k^3 - 2}{3x_k^2 - 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_k^3 - 1}{x_k^2 - 1}$$

ד-ו. מימוש האיטרציה ב-Matlab:

```

% roots of x^3 - 3x + 2 in [-3,-1]
r = -2
% initial guess
x = -3
% wanted error
e = 10.^-8

% iterate n times starting at x_0 = x
x_prev = x
iter = 0
while(abs(r-x_prev) > e)
    x_curr = (2./3)*(x_prev.^3-1)/(x_prev.^2-1)
    x_prev = x_curr
    iter = iter + 1
end

% results
iter
x_prev

OUTPUT:
-----
number of iterations:
ans =
    5
x(k):
ans =
   -2.0000000000004262

% error vector
e = abs(x - r)
e =
    1.000000000000000    0.333333333333333    0.055555555555555
    0.001949317738791    0.000002528297975    0.0000000000004261

```

ז. קבוע ההתכנסות וסדר ההתכנסות: שאלה טובה...

(2)

יהי r שורש של הפונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(r) \neq 0$ ו- $f(x)$ גזירה פעמיים ברציפות. תהי $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

א. $g'(r) = 0$:

$$g'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - \frac{f'(x) \cdot f'(x) - f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2} = 1 - 1 + \frac{f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow$$

$$g'(r) = \frac{f''(r) \cdot 0}{\underbrace{(f'(r))^2}_{\neq 0}} = 0$$

ב. $g''(r) = \frac{f''(r)}{f'(r)}$:

$$g''(x) = \frac{[f'''(x) \cdot f(x) + f''(x) \cdot f'(x)] \cdot (f'(x))^2 - 2f'(x) \cdot f''(x) \cdot f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^4} \Rightarrow$$

$$g''(r) = \frac{[f'''(r) \cdot 0 + f''(r) \cdot f'(r)] \cdot (f'(r))^2 - 2f'(r) \cdot f''(r) \cdot f''(r) \cdot 0}{(f'(r))^4} = \frac{f''(r) \cdot (f'(r))^3}{(f'(r))^4} = \frac{f''(r)}{f'(r)}$$

(3)

שיטת Steffenson: $\phi(x) = \frac{f(x+f(x))-f(x)}{f(x)}$, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi(x_n)}$. נראה כי אם השיטה מתכנסת, היא מתכנסת ריבועית:

$$\left| \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r} \right| = \left| \frac{x_n - \frac{(f(x))^2}{f(x+f(x))-f(x)} - r}{x_n - r} \right| = \left| 1 - \frac{(f(x))^2}{(x_n - r)(f(x+f(x))-f(x))} \right| = \dots$$

(4)

עבור $x^{\frac{1}{3}} = 0$ לא ניתן להשתמש בשיטת ניוטון:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3x_n^{\frac{1}{3}} \cdot x_n^{\frac{2}{3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

וברור כי שיטה זו מתבדרת כאשר $n \rightarrow \infty$.

(5)

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ xy + 1 \end{bmatrix} \text{ תהי}$$

א. מציאת שורשים:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) = 0 \\ xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{solutions: } \{(1, -1), (-1, 1)\}$$

ב. איטרציות ניוטון:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - J_{F_k}^{-1} F(\vec{x}_k) \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_k & -2y_k \\ y_k & x_k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_k^2 - y_k^2 \\ x_k y_k + 1 \end{bmatrix}$$

```
function [x_np1, y_np1] = F(x_n,y_n)

J = [2*x_n 2*y_n ; y_n x_n]
res = [x_n ; y_n] - (J^-1)*[x_n.^2-y_n.^2 ; x_n*y_n+1]

x_np1 = res(1);
y_np1 = res(2);

format long;
clear;
clc;
v = [20,-15];
err = v-[1,-1];
i = 1;
E(i) = sqrt(err(1)^2+err(2)^2);

m = 10^-8;
while (E(i) >m)
    i = i + 1;
    [v(1),v(2)] = F(v(1),v(2));
    err = v-[1,-1];
    E(i) = sqrt(err(1)^2+err(2)^2);
end

plot(E)
```

