אנליזה נומרית / תרגיל בית 5#

אריאל סטולרמן

(1)

יהי $P_2(x) = ax^2 + bx + c$ כך ש- $P_2(x_0) = f(x_0), P_2'(x_1) = f'(x_1), P_2(x_2) = f(x_2)$. נתבונן במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = f(x_0) \\ 2ax_1 + b = f'(x_1) \\ ax_2^2 + bx_2 + c = f(x_2) \end{cases} \Rightarrow \text{in matricial writing: } \underbrace{\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f'(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix}$$

קיים פתרון למערכת המשוואות הנ"ל אמ"מ $\det A \neq 0$:

$$\det A = \det\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \\ x_2^2 - x_0^2 & x_2 - x_0 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2x_1 & 1 \\ x_2^2 - x_0^2 & x_2 - x_0 \end{bmatrix} = 2x_1(x_2 - x_0) - x_2^2 + x_0^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$2x_1(x_2 - x_0) \neq x_2^2 - x_0^2 \underset{x_2 \neq x_0 \Rightarrow x_2 - x_0 \neq 0}{\Longleftrightarrow} 2x_1 \neq \frac{(x_2 - x_0)(x_2 + x_0)}{x_2 - x_0} \Leftrightarrow x_1 \neq \frac{x_2 + x_0}{2}$$

(2)

תהי $f(x) = x^4 + 3x^2$, ונתבונן בתחום $[-1,1]$. לפי משפט ידוע כי הפתרון לבעיית ה-minmax הם שורשי פולינום צ'ביצ'ב. לכל פולינום P_i נצטרך את שורשי פולינום צ'ביצ'ב T_{i+1} כנקודות אינטרפולציה. הנוסחה הכללית לשורשי פולינום צ'ביצ'ב בקטע $[-1,1]$ היא: $x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), i = 1, \dots, n$

עבור $P_1(x)$: שורשי $T_2(x)$ הם $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{4} \Rightarrow$$

$$P_1(x) = \frac{7}{4}\left[\frac{x+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2}} + \frac{x-1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}-1/\sqrt{2}}\right] = \frac{7}{4}\left[\frac{\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}x+1}{2}\right] = \frac{7}{4}$$

עבור $P_2(x)$: שורשי $T_3(x)$ הם: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$f(0) = 0,\ \ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{45}{16} \Rightarrow$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{45}{16}\left[\frac{(x-0)(x+\sqrt{3}/2)}{(\sqrt{3}/2-0)(\sqrt{3}/2+\sqrt{3}/2)} + \frac{(x-0)(x-\sqrt{3}/2)}{(-\sqrt{3}/2-0)(-\sqrt{3}/2-\sqrt{3}/2)}\right] = \frac{45}{16}\left[\frac{2x^2+\sqrt{3}x+2x^2-\sqrt{3}x}{3/2}\right] = \frac{15}{8}\cdot 4x^2 = \frac{15}{2}x^2$$

עבור $P_3(x)$: שורשי $T_4(x)$ הם: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$:

$$f\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 3.2892, f\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = 0.4607, f\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right) = 0.4607, f\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right) = 3.2892 \Rightarrow$$

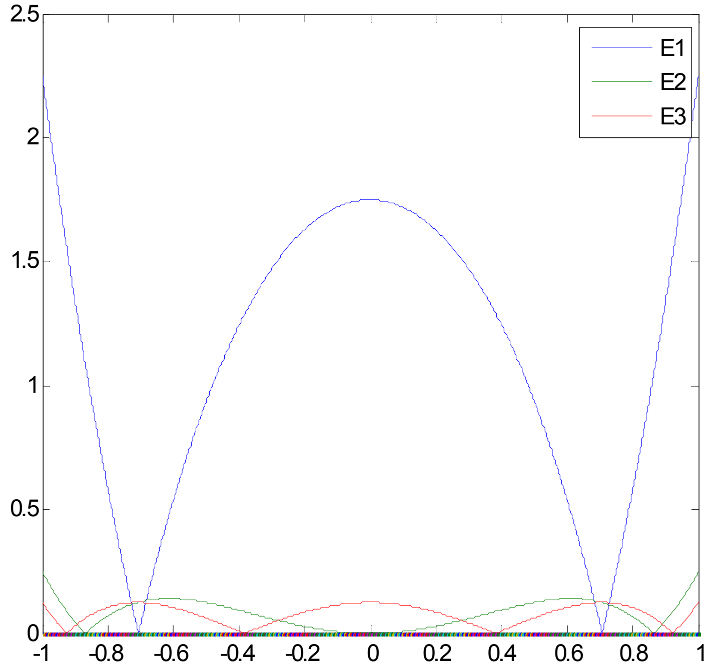
$$P_3(x) = 3.2892\left[\frac{8x-3\pi}{\pi-3\pi}\cdot\frac{8x-5\pi}{\pi-5\pi}\cdot\frac{8x-7\pi}{\pi-7\pi} + \frac{8x-3\pi}{7\pi-3\pi}\cdot\frac{8x-5\pi}{7\pi-5\pi}\cdot\frac{8x-\pi}{7\pi-\pi}\right] + 0.4607\left[\frac{8x-\pi}{3\pi-\pi}\cdot\frac{8x-5\pi}{3\pi-5\pi}\cdot\frac{8x-7\pi}{3\pi-7\pi} + \frac{8x-3\pi}{5\pi-3\pi}\cdot\frac{8x-\pi}{5\pi-\pi}\cdot\frac{8x-7\pi}{5\pi-7\pi}\right] =$$

$3.2892(\dots$

לאחר התייאשות מאורך החישובים השתמשתי בקוד הבא לחישוב ושרטוט גרף השגיאה עבור כל אחד מהפולינומים הנ"ל:

```
n = 2;
i = 1:n;
x = cos(((2*i-1)*pi)/(2*n));
y = x.^4+3.*(x.^2);
[P1,R,S] = lagrangepoly(x,y);
P1

clear;

n = 3;
i = 1:n;
x = cos(((2*i-1)*pi)/(2*n));
y = x.^4+3.*(x.^2);
[P2,R,S] = lagrangepoly(x,y);
P2
```

```
clear;

n = 4;
i = 1:n;
x = cos(((2*i-1)*pi)/(2*n));
y = x.^4+3.*(x.^2);
[P3,R,S] = lagrangepoly(x,y);
P3

clear;

x1 = -1:0.001:1

E1 = [1, 0, 3, 0, -1.75];
E2 = [1, 0, -0.75, 0, 0];
E3 = [1, 0, -1, 0, 0.125];

plot (x1,polyval(E1,x1),x1,polyval(E2,x1),x1,polyval(E3,x1),x1,0);
legend('E1','E2','E3');
```




```
f1 = @(x)-abs(polyval(E1,x))
f2 = @(x)-abs(polyval(E2,x))
f3 = @(x)-abs(polyval(E3,x))

% attain the maximum values:
f1_max = abs(f1(fminbnd(f1,-1,1)))
f2_max = abs(f2(fminbnd(f2,-1,1)))
f3_max = abs(f3(fminbnd(f3,-1,1)))

f1_max =
   1.750000000000000
f2_max =
   0.140624999758902
f3_max =
   0.124999999994874
```

התבוננות בתוצאות ניתן לראות כי $P_3(x)$ הוא הפולינום הנדרש (נותן מינימום שגיאה מקסימלית). בגרף השגיאה ניתן לראות כי ערך זה מופיע ב-3 נקודות בקטע $[-1,1]$.

(3)

כדי למצוא אינטרפולציית $f(x)=\sin x$ ב-6 נקודות צ׳ביצ׳ב בקטע $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ נמצא תחילה את שורשי $T_6(x)$ בקטע לפי הנוסחה:

$$\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), i=1,\dots,n$$

$\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\pi}{8}, \qquad \frac{1}{2}(b-a)=\frac{\pi}{8}$

- $x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}\cong 0.7720$
- $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}\cong 0.6703$
- $x_3=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{12}\cong 0.4943$
- $x_4=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{12}\cong 0.2910$
- $x_5=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{4}\cong 0.1150$
- $x_6=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\cos\frac{11\pi}{12}\cong 0.0133$

להלן חסם לשגיאה:

- $sin'(x)=\cos x;\ sin''(x)=-\sin x;\ sin'''(x)=-\cos x;\ \sin^{(4)}(x)=\sin x;\ \sin^{(5)}(x)=\cos x;\ \sin^{(6)}(x)=-\sin x$
- $\frac{\pi}{4}\cong 0.7853$

$E_6\le \max_{x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]}\left|\frac{f^{(6)}(\eta)}{6!}\cdot\prod_{i=1}^{6}(x-x_i)\right|\le\frac{1}{720}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\prod_{i=1}^{6}\left(\frac{\pi}{4}-x_i\right)\cong 1.128\times 10^{-7}$

(4)

(a)

עבור $f(x)=x^3-x-1$ כאשר $x\in[1,2]$:

- איטרציה מתכנסת: $x^3-x-1=0\Rightarrow x^3=x+1\Rightarrow g(x)\coloneqq\sqrt[3]{x+1}$

הוכחת התכנסות:

1) $1\le x\le 2\Rightarrow 2\le x+1\le 3\Rightarrow\sqrt[3]{2}\le\sqrt[3]{x+1}=g(x)\le\sqrt[3]{3}$

$\left[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3}\right]\subseteq[1,2]\Rightarrow Im(g)\subseteq Dom(g)$

2) $|g'(x)|=\left|\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right|\underset{x\in[1,2]}{\le}\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\cong 0.21<1$

ומכאן שהאיטרציה מתכנסת.

```
p = [1 0 -1 -1]
roots(p)
ans =
  1.324717957244745
 -0.662358978622373 + 0.562279512062301i
 -0.662358978622373 - 0.562279512062301i
r = 1.324717957244745
x = 1.5 # initial guess
err_limit = 10.^-12
iter = 0

while ((iter < 100) && (abs(x-r) > err_limit))
        iter = iter + 1
        x = (x+1).^(1/3)
        xs(iter) = x
end

iter =
    16
xs =
   1.357208808297453   1.330860958801428   1.325883774232348
   1.324939363401885   1.324760011292703   1.324725945226887
   1.324719474534364   1.324718245448936   1.324718011988197
   1.324717967643087   1.324717959219877   1.324717957619916
```

```
   1.324717957316008   1.324717957258282   1.324717957247317
   1.324717957245234
```

- איטרציה לא מתכנסת : $x^3 - x - 1 = 0 \Rightarrow h(x) \coloneqq x^3 - 1$:

הוכחת אי-התכנסות :

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow 1 \le x^3 \le 8 \Rightarrow 0 \le x^3 - 1 = g(x) \le 7$$

כיוון ש-$[0,7]$ לא מוכל ב-$[1,2]$, $h(x)$ לא מתכנסת.

```
x = 1.5
iter = 0
while((iter < 30) && (abs(x-r)>err_limit))
        iter = iter + 1
        x = x.^3 - 1
        xs(iter) = x
end

xs =
  1.0e+265 *
   0.000000000000000   0.000000000000000   0.000000000000000
   0.000000000000000   0.000000000000000   0.000000000000000
   4.498561740550715                 Inf                 Inf
                 Inf                 Inf                 ...
```

עבור $f(x) = x - \cos x$: תחילה נמצא תחום – ניתן לקחת את הקטע $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ כיוון ש-$Im(x)_{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]} = \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ ו-$Im(\cos x)_{\left[0,\frac{\pi}{3}\right]} = \left[\frac{1}{2},1\right]$, ולכן ישנה נקודת חיתוך בין שתי הפונקציות בקטע זה.

- איטרציה מתכנסת : $x - \cos x = 0 \Rightarrow g(x) \coloneqq \cos x$

הוכחת התכנסות :

1) $g(0) = \cos 0 = 1, g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow Im(g) \subseteq Dom(g)\ in\ \left[0,\frac{\pi}{3}\right]$

2) $|g'(x)| = |\sin x| \underset{x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]}{\le} \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0.886 < 1$

ומכאן שהאיטרציה מתכנסת.

```
x = pi/6
x =
   0.523598775598299
iter = 0
f = @(x)x-cos(x)
r = fzero(f,[0,pi./3])
r =
   0.739085133215161
err_limit = 10.^-12

while((iter < 100) && (abs(x - r) > err_limit))
    iter = iter + 1
    x = cos(x)
    xs(iter) = x
end

iter =
    66
xs =
   0.866025403784439   0.647859344852457   0.797377468966026
   0.698585599943777   0.765752603469936   0.720860947437835
   0.751237755036498   0.730844606793628   0.744610893998621
   0.735351649627466   0.741594895817272   0.737392200997288
   0.740224453061040   0.738317194143353   0.739602208230285
   0.738736726477177   0.739319779322409   0.738927052429599
   0.739191609098758   0.739013405589741   0.739133447905185
   0.739052586996160   0.739107056348340   0.739070365351324
   0.739095080945292   0.739078432267912   0.739089647037241
   0.739082092642781   0.739087181377875   0.739083753546568
   0.739086062575817   0.739084507186324   0.739085554915571
   0.739084849152626   0.739085324563071   0.739085004320893
   0.739085220039884   0.739085074728980   0.739085172612154
   0.739085106676871   0.739085151091671   0.739085121173328
   0.739085141326684   0.739085127751141   0.739085136895790
   0.739085130735844   0.739085134885258   0.739085132090163
   0.739085133972973   0.739085132704689   0.739085133559020
```

```
0.739085132983533   0.739085133371188   0.739085133110059
0.739085133285958   0.739085133167470   0.739085133247285
0.739085133193521   0.739085133229737   0.739085133205342
0.739085133221775   0.739085133210705   0.739085133218162
0.739085133213139   0.739085133216522   0.739085133214243
```

- איטרציה לא מתכנסת: $x - \cos x = 0 \Rightarrow x = \cos x \Rightarrow h(x) \coloneqq \arccos x$

הוכחת אי-התכנסות: $\frac{\pi}{3} \gg 1.57 \cong \arccos 0$ ולכן $Im(h)$ אינו מוכל ב-$Dom(h)$. בביצוע אותו קוד רק עם `x = arcos(x)`, האיטרציות לא מתכנסות גם אחרי 1000 חזרות (אין טעם לשים את הקוד והפלט). אם היינו לוקחים את $g(x)$ אך מעל תחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ למשל, הכולל נקודה בה הנגזרת מתאפסת, אז אם היינו לוקחים ניחוש בתחום הזה $g(x)$ כנראה לא היתה מתכנסת.

(b)

חישוב מספר איטרציות עבור הפונקציה $f(x) = x^3 - x - 1$:

$$k \cong |g'(r)| = \left|\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right|_{x=1.324\ldots} \cong 0.19 \Rightarrow k^n = \frac{10^{-12}}{|x_0 - r|} = \frac{10^{-12}}{|1.5 - 1.342|} \Rightarrow n = \log_k \frac{10^{-12}}{|1.5 - 1.342|} \cong 15.58 \Rightarrow$$

ומכאן שנדרש ל-16 איטרציות, שזה בדיוק מספר האיטרציות שהרצנו עד קבלת השגיאה הרצויה.

חישוב מספר האיטרציות עבור הפונקציה $f(x) = x - \cos x$:

$$k \cong |g'(r)| = |-\sin x|_{x=0.739\ldots} \cong 0.67 \Rightarrow k^n = \frac{10^{-12}}{|x_0 - r|} = \frac{10^{-12}}{\left|\frac{\pi}{6} - 0.739\right|} \Rightarrow n = \log_k \frac{10^{-12}}{\left|\frac{\pi}{6} - 0.739\right|} \cong 66.04 \Rightarrow$$

ומכאן שנדרש ל-67 איטרציות, שזה כמעט בדיוק מספר האיטרציות שהרצנו עד קבלת השגיאה הרצויה (66; כנראה הסטיה הקטנה נובעת מאובדן דיוק בחישוב).