אנליזה נומרית 1

תרגיל מס' 1

שאלה 1

א) הוכח כי $x=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}B_k^n\left(x\right)$, כאשר $B_k^n\left(x\right)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ הוא בסיס פולינומיאלי של ברנשטיין.

רמז: הראה קודם כי $\frac{d}{dx}B_k^n\left(x\right)=n(B_{k-1}^{n-1}(x)-B_k^{n-1}(x))$.

ב) השתמש בבניה של משפט ויירשטרס למציאת פולינום שמקרב את הפונקציות הבאות עם שגיאה קטנה מ- 0.01 ברווח [-1,1]. (הדרכה: העתק לקטע [0,1] ומצא את מעלת הפולינום הדרושה בעזרת הוכחת המשפט)

הפונקציות הן: $f\left(x\right)=\left|x\right|$, $f\left(x\right)=e^x$.

שאלה 2

יהיה $S_N=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}$ אזי לכל x מתקיים $\lim_{N\to\infty}S_N=e^x$.

א) עבור $x=10, N=10:10:100$ חשב את S_N. כל $S\left(i\right)$ מייצג סכום חלקי אשר מקרב את e^x בדיוק שונה.

ב) השתמש בפקודת MATLAB **exp(x)** על מנת לצייר גרף של שגיאה יחסית $R=\left|\frac{e^x-S_N}{e^x}\right|$.

ג) חזור על א-ב עבור $x=-10$

ד) האם סדרות מתכנסות בשתי המקרים?

ה) האם הסדרות מתכנסות לערך הנכון?

אערה: להגיש קוד MATLAB, פלטים של S_N, R ב- ***format long*** (ראה doc format) וגרפים.

שאלה 3

א) כתוב תוכנית אשר תחשב את הפונקציה $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ כאשר $n=10^k$. יש לחשב את הפונק ציה עבור $1\le k\le 30$, התוכנית צריכה לחשב את השגיאה המוחלטת ואת השגיאה היחסית בהנחה שהערך האמיתי של הפונקציה הוא e (אקספוננט).

ב) בשלב כלשהו השגיאה היחסית תהיה מאוד גדולה מה הסיבה לכך?

שאלה 4

כידוע $\frac{1}{3}\cdot 3=1$ וגם $\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot 3^n=1$. מצא את ה-$n$ המינימאלי עבורו $\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot 3^n\ne 1$ ב-MATLAB