

לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 8

1. קבע האם הנוסחאות הבאות תקפות לוגית. הוכח או תן דוגמא נגדית.

- (א) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow \exists xB)$
- (ב) $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$
- (ג) $(\exists xA \wedge \exists xB) \rightarrow \exists x(A \wedge B)$
- (ד) $x \notin FV(A), \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$
- (ה) $x \notin FV(A), \forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall xB)$
- (ו) $(\forall x \exists y A) \rightarrow (\exists y \forall x A)$
- (ז) $(\forall x A) \rightarrow (\exists x A)$
- (ח) $(\exists x A) \rightarrow (\forall x A)$
- (ט) $(\exists x(A \vee B)) \rightarrow (\exists xA \vee \exists xB)$
- (י) $(\neg \exists x A) \rightarrow (\forall x \neg A)$
- (יא) $(\forall x \neg A) \rightarrow (\neg \exists x A)$

2. קבע איזה מהנוסחאות הבאות תקפות לוגית. p^1, q^2 הם סימני יחס, c קבוע.

- $\forall x(p(x) \rightarrow p(c))$ •
- $\exists y(\forall x(q(x, y))) \rightarrow \forall x(\exists y(q(x, y)))$ •
- $\forall x(\exists y(q(x, y))) \rightarrow \exists y(\forall x(q(x, y)))$ •

3. במבנה המספרים הטבעיים נפרש את e^2 כיחס השוויון, l^2 - יחס "קטן מ-", f_1^2 - חיבור, f_2^2 - כפל, c_0 - אפס. מצא השמות שיפריכו את הנוסחאות (אם יש כאלה) הבאות וכאלה שיהפכו אותן לנכונות במבנה:

- $\forall y(e(f_2(x, y), z))$ •
- $e(c_0, f_1(x, y))$ •
- $l(c_0, f_1(x, y))$ •
- $\exists y(\exists z(\neg e(c_0, z) \wedge e(f_2(z, z), z) \wedge e(x, f_2(y, z))))$ •

4. הוכח שאם x אינו חופשי ב- A אז לכל מבנה M והשמה v מתקיים:

$$M, v \models (\forall x(B \rightarrow A)) \rightarrow (\exists xB \rightarrow A)$$

5. ציין לגבי כל אחד ממופעי המשתנים האם הוא חופשי או קשור:

- (א) $\forall x_1 \forall x_3 (p(x_1, x_2) \rightarrow q(x_3))$
- (ב) $\forall x_2 (p(f(x_2)) \rightarrow \forall x_3 q(x_1, x_2, x_3))$
- (ג) $(\neg p(x_2) \wedge \forall x_5 p(x_2)) \wedge \forall x_2 p(x_2)$
- (ד) $[\forall x_1 (r(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 r(x_2, x_3))] \vee [\exists x_1 \forall x_1 (r(x_2, x_5) \rightarrow \exists x_4 r(x_1, x_4))]$