

## לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 8

1. קבע האם הנוסחאות הבאות תקפות לוגית. הוכח או תן דוגמא נגדית.

- (א)  $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow \exists xB)$
- (ב)  $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB)$
- (ג)  $(\exists xA \wedge \exists xB) \rightarrow \exists x(A \wedge B)$
- (ד)  $x \notin FV(A), \forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$
- (ה)  $x \notin FV(A), \forall x(A \vee B) \rightarrow (A \vee \forall xB)$
- (ו)  $(\forall x \exists y A) \rightarrow (\exists y \forall x A)$
- (ז)  $(\forall x A) \rightarrow (\exists x A)$
- (ח)  $(\exists x A) \rightarrow (\forall x A)$
- (ט)  $(\exists x(A \vee B)) \rightarrow (\exists xA \vee \exists xB)$
- (י)  $(\neg \exists x A) \rightarrow (\forall x \neg A)$
- (יא)  $(\forall x \neg A) \rightarrow (\neg \exists x A)$

2. קבע איזה מהנוסחאות הבאות תקפות לוגית.  $p^1, q^2$  הם סימני יחס,  $c$  קבוע.

- $\forall x(p(x) \rightarrow p(c))$  •
- $\exists y(\forall x(q(x, y))) \rightarrow \forall x(\exists y(q(x, y)))$  •
- $\forall x(\exists y(q(x, y))) \rightarrow \exists y(\forall x(q(x, y)))$  •

3. במבנה המספרים הטבעיים נפרש את  $e^2$  כיחס השוויון,  $l^2$  - יחס "קטן מ-",  $f_1^2$  - חיבור,  $f_2^2$  - כפל,  $c_0$  - אפס. מצא השמות שיפריכו את הנוסחאות (אם יש כאלה) הבאות וכאלה שיהפכו אותן לנכונות במבנה:

- $\forall y(e(f_2(x, y), z))$  •
- $e(c_0, f_1(x, y))$  •
- $l(c_0, f_1(x, y))$  •
- $\exists y(\exists z(\neg e(c_0, z) \wedge e(f_2(z, z), z) \wedge e(x, f_2(y, z))))$  •

4. הוכח שאם  $x$  אינו חופשי ב- $A$  אז לכל מבנה  $M$  והשמה  $v$  מתקיים:

$$M, v \models (\forall x(B \rightarrow A)) \rightarrow (\exists xB \rightarrow A)$$

5. ציין לגבי כל אחד ממופעי המשתנים האם הוא חופשי או קשור:

- (א)  $\forall x_1 \forall x_3(p(x_1, x_2) \rightarrow q(x_3))$
- (ב)  $\forall x_2(p(f(x_2)) \rightarrow \forall x_3 q(x_1, x_2, x_3))$
- (ג)  $(\neg p(x_2) \wedge \forall x_5 p(x_2)) \wedge \forall x_2 p(x_2)$
- (ד)  $[\forall x_1(r(x_1, x_3) \wedge \exists x_1 r(x_2, x_3))] \vee [\exists x_1 \forall x_1(r(x_2, x_5) \rightarrow \exists x_4 r(x_1, x_4))]$