

לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 11

1. שאלה ממבחן:

תהינה L שפה מסדר ראשון, T תורה של פסוקים ב- L ו- A נוסחה כך ש- $Fv[A] = \{x, y\}$. נגדיר שפה חדשה L' על ידי שנוסיף ל- L סימן יחס דו-מקומי חדש $P_A : t^2 \rightarrow o$. נגדיר $T' = T \cup \{\forall x \forall y (P_A(x, y) \leftrightarrow A)\}$. הוכח: T' היא הרחבה משמרת של T , כלומר: לכל נוסחה B בשפה L מתקיים: $T \vdash_{FOL} B$ אם ורק אם $T' \vdash_{FOL} B$.

2. שאלה ממבחן:

הצרן את הטענות הבאות בשפה מסדר ראשון עם סיגנטורה מתאימה:

- (א) לכל קבוצה X קיימת קבוצה Y כך שעוצמת Y גדולה מעוצמת X .
- (ב) לכל X ו- Y , אם X מוכל ב- Y , אז עוצמת X אינה גדולה מעוצמת Y .
- (ג) כל הקבוצות מוכלות ב- V .
- (ד) V אינה קבוצה.

הערה: השתמש בסימן פונקציה חד מקומי || | עבור עוצמה, סימני יחס ל-"קטן" ו-"הכלה" ובקבוע V .

כעת קבע האם טענה ד' נובעת לוגית מטענות א'-ג'. אם כן - הוכח בעזרת דדוקציה טבעית. אם לא - הפרך על ידי דוגמה נגדית.

3. שאלה ממבחן:

הוכח, או הפרך על ידי דוגמה נגדית, את הטענות הבאות:

- (א) תהי A נוסחה המקיימת $Fv[A] = \{x, y\}$. אז לכל שני קבועים d_1, d_2 שאינם מופיעים ב- A : $A\{d_1/x, d_2/y\}$ ספיקה.
- (ב) לכל מבנה M : M הוא v -מודל של נוסחה $\forall x A \rightarrow \forall x B$ אם ורק אם M הוא v -מודל של הנוסחה $\forall x B$ או M אינו v -מודל של הנוסחה $\forall x A$.
- (ג) לכל נוסחה A , שמות עצם s_1, s_2 ומשתנים x, y : $A\{s_1/x\}\{s_2/y\} = A\{s_1/x, s_2/y\}$.
- (ד) אם s חופשי להצבה במקום x ב- A , אז לכל מבנה M והשמה v מתקיים: $M, v \models A\{s/x\} \rightarrow \exists x A$.

4. הוכח:

$$T \vdash_{FOL}^v A \Leftrightarrow \forall T \vdash_{FOL}^v \forall A$$

תזכורת: $\forall A$ זה הסגור האוניברסלי של A . זהו פסוק מהצורה $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n A$ כאשר $FV(A) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.