לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית 10#

אריאל סטולרמן

(1)

א. $\forall x(A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$:

1. $\forall x(A \to B) \Rightarrow \forall x(A \to B)$, אקסיומה.
2. $\forall x(A \to B) \Rightarrow A \to B$, לפי $(\forall E)$ ו-(1), כאשר x חופשי להצבה במקום x ב-$A \to B$.
3. $A \Rightarrow A$, אקסיומה.
4. $A, \forall x(A \to B) \Rightarrow B$, לפי $(\to E)$, (2) ו-(3).
5. $A, \forall x(A \to B) \Rightarrow \exists xB$, לפי $(\exists I)$ ו-(4), כאשר x חופשי להצבה במקום x ב-B.
6. $\exists xA, A, \forall x(A \to B) \Rightarrow \exists xB$, לפי (5).
7. $\exists xA, \forall x(A \to B) \Rightarrow \exists xA$, אקסיומה.
8. $\exists xA, \forall x(A \to B) \Rightarrow \exists xB$, לפי $(\exists E)$, (6) ו-(7), כאשר x חופשי להצבה במקום x ב-A ואינו מופיע חופשי ב-$\exists xA, \forall x(A \to B), \exists xB$.
9. $\forall x(A \to B) \Rightarrow \exists xA \to \exists xB$, לפי $(\to I)$ ו-(8).
10. $\Rightarrow \forall x(A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$, לפי $(\to I)$ ו-(9).

ב. $\forall x(A \to B) \to (\forall xA \to \forall xB)$: הוכח בתרגול.

ג. $\neg\exists xA \to \forall x\neg A$:

1. $A, \neg\exists xA \Rightarrow \neg\exists xA$, אקסיומה.
2. $A \Rightarrow A$, אקסיומה.
3. $A \Rightarrow \exists xA$, לפי $(\exists I)$, כאשר x חופשי להצבה במקום x ב-A.
4. $\neg\exists xA \Rightarrow \neg A$, לפי $(\neg I)$, (1) ו-(3).
5. $\neg\exists xA \Rightarrow \forall x\neg A$, לפי $(\forall I)$ ו-(4), כאשר x חופשי להצבה במקום x ב-$\neg A$ ואינו מופיע חופשי ב-$\neg\exists xA$.
6. $\Rightarrow \neg\exists xA \Rightarrow \forall x\neg A$, לפי $(\to I)$ ו-(5).

ד. $\forall x\neg A \to \neg\exists xA$: לא הצלחתי.

(2)

א. $\frac{\Gamma \Rightarrow A\{t/x\}}{\Gamma \Rightarrow \exists xA}$:

- $\Gamma \Rightarrow A\{t/x\}$, הנחה, כאשר t חופשי להצבה במקום x ב-A.
- $\Rightarrow \Gamma \to A\{t/x\}$, לפי $(\to I)$ ו-(1).
- $\forall x\neg A, \Gamma \Rightarrow \Gamma$, אקסיומה.
- $\forall x\neg A, \Gamma \Rightarrow A\{t/x\}$, לפי $(\to E)$, (2) ו-(3).
- $\forall x\neg A \Rightarrow \forall x\neg A$, אקסיומה.
- $\forall x\neg A \Rightarrow \neg A\{t/x\}$, לפי $(\forall E)$ ו-(5), כאשר t חופשי להצבה במקום x ב-A לפי ההנחה ב-(1).
- $\Gamma \Rightarrow \neg\forall x\neg A$, לפי $(\neg I)$, (4) ו-(6).
- $\Gamma \Rightarrow \exists xA$, לפי הקיצור הנתון.

ב. $\frac{\Gamma \Rightarrow \exists xA \quad \Gamma, A\{y/x\} \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}$: לא הצלחתי.

(3)

הגדרת הסיגנטורה של השפה כסיגנטורה של תורת המספרים בתוספות:

- קבועים: -
- סימני פונקציה: $/ : \iota^2 \to \iota$ כאשר $n/k = j\ s.t.\ j \times k = n$.
- סימני יחס: $Prime: \iota \to o$ המוגדר כפי שהוגדר בתרגיל בית7, $N: \iota \to o$ השווה לקבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$.

א. מספר אינו מתחלק ממש בעוקבו

$$\forall n(N(n) \to \neg N(n/S(n)))$$

ב. גורם של מספר לא יכול להיות גורם של העוקב לאותו מספר

$$\forall n(N(n) \to \forall m(N(m) \land \exists k(N(k) \land ((k \times m) = n)) \to \forall k(N(k) \to \neg((k \times m) = S(n)))))$$

ג. כל מספר הוא ראשוני או מתחלק ממש באיזשהו מספר ראשוני

$$\forall n(N(n) \to (Prime(n) \lor \exists k(Prime(k) \land \exists m(N(m) \land ((m \times k) = n)))))$$

ד. בהינתן מספר אפשר למצוא מספר המתחלק ממש בכל המספרים הקטנים מהמספר הראשון

$$\forall n(N(n) \to \exists k(N(k) \land \forall m(N(m) \land (0 < m) \land (m < n) \to \exists l((l \times m) = k))))$$

ה. לכל מספר אפשר למצוא מספר ראשוני שאינו קטן ממנו

$$\forall n(N(n) \to \exists m(Prime(m) \land ((n < m) \lor (n = m))))$$

ו. כל מספר קטן מאיזשהו מספר ראשוני

$$\forall n(N(n) \to \exists m(Prime(m) \land (n < m)))$$

ז. כל מספר הוא ראשוני או קטן מאיזשהו מספר ראשוני

$$\forall n(N(n) \to (Prime(n) \lor \exists k(Prime(k) \land (n < k))))$$

עבור המבנה $M =< \{2,4\}, I >$ מתקיימות הטענות א׳-ד׳ (חלקן באופן ריק), אך לא מתקיימות:

- ה׳: לא לכל מספר אפשר למצוא מספר ראשוני שאינו קטן ממנו, למשל עבור 4.
- ו׳: 2 למשל אינו קטן מאיזשהו מספר ראשוני במבנה.
- ז׳: 4 למשל אינו ראשוני ואינו קטן ממספר ראשוני כלשהו במבנה.

(4)

יהי A פסוק. נניח כי $T \vdash_{hfol} A \to B$. להלן הוכחה ל-B מ-$T \cup \{A\}$:

... (ההוכחה של $A \to B$ מ-T)

1. $A \to B$
2. A, הנחה
3. B לפי MP, (1) ו-(2).

יהי A פסוק, ונניח כי $T \cup \{A\} \vdash_{hfol} B$. נראה כי $T \vdash_{hfol} A \to B$: בדומה להוכחה של משפט הדדוקציה ב-HPC, נראה באינדוקציה על אורך ההוכחה של $T \cup \{A\} \vdash_{hfol} B$: נניח ל-$B$ ההוכחה $\varphi_1, \dots, \varphi_n = B$ מ-$T \cup \{A\}$. נראה כי $T \vdash_{hfol} A \to \varphi_i$ לכל $1 \le i \le n$:

- $\varphi_i \in T \cup \{A\}$: כמו בהרצאה.
- φ_i אקסיומה: אותה הוכחה כמו ל-HPC.
- φ_i נובע בעזרת MP: אותה הוכחה כמו ל-HPC.
- φ_i נובע בעזרת GEN מ-φ_k, כלומר: $\varphi_i = \forall x \varphi_k$ $(k < i)$: להי״א על φ_k ידוע כי $T \vdash_{hfol} A \to \varphi_k$. נרצה להראות ש-$T \vdash_{hfol} \forall x \varphi_k$:
  1. ...
  2. $A \to \varphi_k$
  3. $\forall x(A \to \varphi_k)$, לפי GEN ו-(2).
  4. $\forall x(A \to \varphi_k) \to (A \to \forall x \varphi_k)$, אקסיומה $III.i$.
  5. $A \to \forall x \varphi_k$, לפי MP, (3) ו-(4).

בפרט הנ״ל מתקיים עבור $i = n$, ולכן מתקיים $T \vdash_{hfol} A \to B$.

(5)

המשך הוכחת כיוון $\Rightarrow$ מהשיעור: נותר להוכיח כי $\vdash_{HFOL^*} \forall x(B \to A) \to (\exists xB \to A), x \notin Fv[A]$: לא הצלחתי.

הוכחת כיוון $\Leftarrow$:

אם $\Gamma \vdash_{hfol} C \to A$ אז $\Gamma \vdash_{hfol} C \to \forall xA$:

1. ... (הוכחה נתונה)
2. $C \to A$
3. $\forall x(C \to A)$, לפי GEN ו-(2).
4. $\forall x(C \to A) \to (C \to \forall xA)$, אקסיומה $III.i$.
5. $C \to \forall xA$, לפי MP, (3) ו-(4).

אם $\Gamma \vdash_{hfol} A \to C$ אז $\Gamma \vdash_{hfol} \exists xA \to C$:

1. ...(הוכחה נתונה)
2. $A \to C$
3. $\forall x(A \to C)$, לפי GEN ו-(2).
4. $\forall x(A \to C) \to (\exists xA \to C)$, אקסיומה $III.ii$.
5. $\exists xA \to C$, לפי MP, (3) ו-(4).