

## לוגיקה למדעי המחשב - תרגיל מס' 10

1. הוכיחו בעזרת דדוקציה טבעית שהנוסחאות הבאות תקפות לוגית:

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\exists xA \rightarrow \exists xB) \quad (\text{א})$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall xA \rightarrow \forall xB) \quad (\text{ב})$$

$$\neg \exists xA \rightarrow \forall x\neg A \quad (\text{ג})$$

$$\forall x\neg A \rightarrow \neg \exists xA \quad (\text{ד})$$

2. יהי  $\exists xA$  קיצור של  $\neg \forall x\neg A$ . הוכח ששני הכללים של  $\exists$  ב- $NDFOL$  נגזרים בעזרת הכללים האחרים.

3. הצרינו את הטענות הבאות. תארו במדויק את השפה שבה אתם משתמשים.

(א) מספר אינו מתחלק ממש בעוקבו.

(ב) גורם של מספר לא יכול להיות גורם של העוקב לאותו מספר (הערה: "X גורם של Y" מתפרש כאן "Y מתחלק ממש ב-X")

(ג) כל מספר הוא ראשוני או מתחלק ממש באיזשהו מספר ראשוני.

(ד) בהיתן מספר אפשר למצוא מספר המתחלק ממש בכל המספרים הקטנים מהמספר הראשון.

(ה) לכל מספר אפשר למצוא מספר ראשוני שאינו קטן ממנו.

(ו) כל מספר קטן מאיזשהו מספר ראשוני.

(ז) כל מספר הוא ראשוני או קטן מאיזשהו מספר ראשוני.

קבעו אילו מבין הטענות ה-ז' נובעות לוגית מטענות א'-ד'. הוכיחו את התשובות החיוביות בעזרת דדוקציה טבעית והפריכו את השליליות על ידי דוגמא נגדית.

4. הוכח שאם  $A$  פסוק, אז  $T \cup \{A\} \vdash_{HFOL} B$  אם  $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow B$ .

5. השלם את השאלה מתרגיל כיתה: הראה שהמערכת המתקבלת מ- $HFOL$  על ידי כך שנחליף את כלל ההכללה ואת האקסיומות

$$\forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (\exists xB \rightarrow A)$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$$

כאשר  $x \notin FV(A)$  בשני הכללים הבאים:

$$\frac{A \rightarrow C}{\exists xA \rightarrow C} \quad \frac{C \rightarrow A}{C \rightarrow \forall xA}$$

בתנאי ש- $x$  אינו חופשי ב- $C$ , שקולה ל- $HFOL$ .