לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית #7

אריאל סטולרמן

(1)

טענה: כל משפט של HPI הוא טאוטולוגיה בלוגיקה התלת-ערכית של גדל. מספיק להוכיח כי כל אקסיומות HPI מקיימות זאת, ובשיעור הוכח עבור האקסיומה $(I2)$. יהיו $a, b, c \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ שלושה ערכי אמת, להלן הוכחה עבור שאר האקסיומות:

$(I1)$: צ"ל כי $a \to (b \to a) = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

- אם $a \le b$ אז $b \to a = 1$, ואז $a \le b \to a$ ולכן $a \to (b \to a) = 1$.
- אם $a < b$ אז $b \to a = a$, ואז $a = b \to a$ ולכן $a \to (b \to a) = 1$.

$(N1)$: צ"ל כי $(a \to b) \to \big((a \to \neg b) \to \neg a\big) = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

a	$\neg a$	b	$\neg b$	$a \to b$	$a \to \neg b$	$(a \to \neg b) \to \neg a$	$(N1)$
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	1	0	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1

ומכאן שלכל הצבה ל-a, b נקבל 1.

$(N2)$: צ"ל כי $\neg a \to (a \to b) = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

- אם $a \le b$ אז $a \to b = 1$ ואז $\neg a \to (a \to b) = \neg a \to 1 = 1$.
- אם $a > b$ אז $a \to b = b$ ואז $\neg a \to (a \to b) = \neg a \to b$. כיוון ש-$a > b$ אז נחלק למקרים ($a \in \{1, \frac{1}{2}\}$):

  $\neg a = 0$, $a = 1$: לכל ערך של b ($0, \frac{1}{2}$) נקבל כי $\neg a \le b$ ולכן $\neg a \to b = 1$.

  $\neg a = 0$, $a = \frac{1}{2}$: b חייב להיות 0 ולכן $\neg a \to b = 0 \to 0 = 1$.

$(C1)$: צ"ל כי $a \wedge b \to a = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

- אם $a \le b$ אז $a \wedge b = a$ ואז $a \wedge b \to a = a \to a = 1$.
- אם $a > b$ אז $a \wedge b \to a = b \to a = 1$.

$(C2)$: צ"ל כי $a \wedge b \to b = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

- אם $b \le a$ אז $a \wedge b = b$ ואז $a \wedge b \to a = b \to a = 1$.
- אם $b > a$ אז $a \wedge b = a$ ואז $a \wedge b \to a = a \to a = 1$.

$(C3)$: צ"ל כי $a \to (b \to a \wedge b) = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

- אם $a \le b$ אז $a \wedge b = a$ ולכן $b \to a \wedge b = b \to a$. אם $a < b$ אז $b \to a = a$ והביטוי שווה ל- $a \to a = 1$, ואם $a = b$ אז $b \to a = 1$ ואז הביטוי שווה ל-1 $a \to 1 = 1$ לכל ערך של a.
- אם $a > b$ אז $a \wedge b = b$ ולכן $b \to a \wedge b = b \to b = 1$. מכאן שהביטוי שווה ל-1 $a \to 1$ השווה ל-1 לכל ערך של a.

$(D1)$: צ"ל כי $a \to a \vee b = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

- אם $a \le b$ אז $a \vee b = b$ ולכן $a \to a \vee b = a \to b = 1$.
- אם $a > b$ אז $a \vee b = a$ ולכן $a \to a \vee b = a \to a = 1$.

$(D2)$: $b \to a \vee b = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b:

- אם $b \le a$ אז $a \vee b = a$ ולכן $b \to a \vee b = b \to a = 1$.
- אם $b > a$ אז $a \vee b = b$ ולכן $b \to a \vee b = b \to b = 1$.

$(D3)$: צ"ל כי $(a \to c) \to \big((b \to c) \to (a \vee b \to c)\big) = 1$ עבור כל הצבה ל-a, b, c:

- אם $b \leq c$ אז $b \to c = 1$ ואז $(b \to c) \to (a \vee b \to c) = 1 \to (a \vee b \to c) = a \vee b \to c$. לכן הביטוי שווה ל-$(a \to c) \to (a \vee b \to c)$. נחלק למקרים:
  - $a \geq b$: $a \vee b = a$ ולכן הביטוי שווה ל-$(a \to c) \to (a \to c) = 1$.
  - $a < b \leq c$: $a \vee b = b$ ולכן הביטוי שווה ל-$(a \to c) \to (b \to c) = 1 \to 1 = 1$.
- אם $b > c$ אז $b \to c = c$ ולכן $(b \to c) \to (a \vee b \to c) = c \to (a \vee b \to c)$, וזה שווה ל-1 לפי $(I1)$ שהוכח לעיל. מכאן שהביטוי שווה ל-$1 \to (a \to c)$, וזה שווה ל-1 לכל ערך של a, c.

(2)

טענה: מהנוסחאות $I. (A \to (B \to A))$, $II. (A \to (B \to (A \wedge B)))$ **לא נובעת** הנוסחה $III. \big((A \to (A \to B)) \to (A \to B)\big)$ בלוגיקה התלת ערכית של *Lukasiewiez*. נראה כי עבור הצבת ערכי האמת $A = \frac{1}{2}, B = 0$ שתי הנוסחאות הראשונות מסתפקות (מקבלות 1) ואילו הנוסחה האחרונה לא:

- $\left(\frac{1}{2} \to \left(0 \to \frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2} \to 1\right) = 1$
- $\left(\frac{1}{2} \to \left(0 \to \left(\frac{1}{2} \wedge 0\right)\right)\right) = \left(\frac{1}{2} \to (0 \to 0)\right) = \left(\frac{1}{2} \to 1\right) = 1$
- $\left(\left(\frac{1}{2} \to \left(\frac{1}{2} \to 0\right)\right) \to \left(\frac{1}{2} \to 0\right)\right) = \left(\left(\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\right) \to \frac{1}{2}\right) = \left(1 \to \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \neq 1$

ומכאן שקיימת השמה v כך ש-$v(I), v(II) \in D, v(III) \notin D$, ולכן $I, II \nvDash^{\{1\}}_{Lukasiewiez} III$.

(3)

בשאלה זו כל פונ' תסומן עם גרש (') בסוף שמה (למשל $tail'(x)$) וכל יחס יופיע ללא גרש. ה-*arity* תצויין לפי מס' הארגומנטים בפונ'/יחס.

א. אם יש סוסים באורווה אז סוסים אלו הם שחורים:

$$\forall x\big(horse(x) \wedge in(x, stable) \to black(x)\big)$$

ב. כל סוס באורווה שזנבו לבן הוא בעל כתם על המצח:

$$\forall x\left(horse(x) \wedge in(x, stable) \wedge white\big(tail'(x)\big) \to has\_stain\big(forehead'(x)\big)\right)$$

ג. סוסים עם זנב לבן אינם מחבבים סוסים עם כתם על המצח:

$$\forall x \forall y\left(\left(horse(x) \wedge white\big(tail'(x)\big) \wedge horse(y) \wedge has\_stain\big(forehead'(y)\big)\right) \to \neg like(x, y)\right)$$

ד. לאף סוס באורווה אין זנב לבן:

$$\forall x\left(horse(x) \wedge in(x, stable) \to \neg white\big(tail'(x)\big)\right)$$

(4)

כל מספר זוגי הוא סכום של שני מספרים ראשוניים:

$$\forall n\left(even(n) \to \exists i \exists j\left(prime(i) \wedge prime(j) \wedge \big(n = (i + j)\big)\right)\right) \textit{ where:}$$

$$N(n) =^{Def} (n = 0) \vee \exists i\left(N(i) \wedge \big(n = S(i)\big)\right)$$

$$even(n) =^{Def} N(n) \wedge \forall k\left(N(k) \to \neg\left(n = \left(k \times S\big(S(0)\big)\right)\right)\right)$$

$$prime(n) =^{Def} N(n) \wedge \big(n > S(0)\big) \wedge \forall k\left(N(k) \wedge \neg\big(k = S(0)\big) \wedge \neg(k = n) \to \forall j\left(N(j) \to \neg\big(n = (k \times j)\big)\right)\right)$$

(5)

א. לשני ישרים שונים יש לכל היותר נקודה משותפת אחת:

$$\forall a \forall b \forall l \forall m\big(point(a) \wedge point(b) \wedge line(a) \wedge line(b) \wedge on(a, l) \wedge on(a, m) \wedge on(b, l) \wedge on(b, m) \wedge \neg(l = m) \to (a = b)\big)$$

לסעיפים ב' ג' נגדיר:

$$parallel: \iota^2 \to o, \qquad parallel(l,m) =^{Def} line(l) \wedge line(m) \wedge \forall a\big(point(a) \wedge on(a,l) \to \neg on(a,m)\big)$$

ב. y_1, y_2 הם שני ישרים מקבילים:

$$parallel(y_1, y_2)$$

ג. דרך נקודה שמחוץ לישר נתון עובר מקביל יחיד לאותו ישר:

$$\forall l \forall a\, \Big(line(l) \wedge point(a) \wedge \neg on(a,l) \to \exists m\big(line(m) \wedge parallel(m,l) \wedge on(a,m) \wedge \forall n\big(line(n) \wedge parallel(n,l) \wedge on(a,n) \to$$

$$n{=}m$$