לוגיקה למדמ״ח / תרגיל בית #5

אריאל סטולרמן

(1)

בכל הסעיפים הנ״ל נדרש להוכיח עבור φ כלשהי ש-$\vdash_{NDC} \varphi$, כלומר קיימת $\Gamma \subseteq \emptyset$ כך ש-$\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow \varphi$. כיוון ש-$\emptyset$ היא ה-Γ היחידה המתאימה, אז מספיק להוכיח $\vdash_{NDC} \Rightarrow \varphi$, כלומר ש-φ היא משפט של NDC.

א. $\vdash_{NDC} (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$:

1. $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg A \vee \neg B$, אקסיומה.
2. $A \wedge B \Rightarrow A \wedge B$, אקסיומה.
3. $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow (\neg A \vee \neg B) \wedge (A \wedge B)$, לפי (1), (2) ו-$(\wedge I)$.
4. $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow A \wedge B$, אקסיומה.
5. $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow A$, לפי (4) ו-$(\wedge E)$.
6. $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow B$, לפי (4) ו-$(\wedge E)$.
7. $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow \neg A \vee \neg B$, אקסיומה.
8. $\neg A \vee \neg B \Rightarrow \neg A \vee \neg B$, אקסיומה.
9. $\neg A \Rightarrow \neg A$, אקסיומה.
10. $B \Rightarrow B$, אקסיומה.
11. $\neg B \Rightarrow \neg B$, אקסיומה.
12. $B, \neg B \Rightarrow \neg A$, לפי (10), (11) ו-$(\neg I)$.
13. $\neg A \vee \neg B, B \Rightarrow \neg A$, לפי (8), (9), (12) ו-$(\vee E)$.
14. $\neg A \vee \neg B \Rightarrow B \to \neg A$, לפי (13) ו-$(\to I)$.
15. $\Rightarrow (\neg A \vee \neg B) \to (B \to \neg A)$, לפי (14) ו-$(\to I)$.
16. $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow B \to \neg A$, לפי (7), (15) ו-$(\to E)$.
17. $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow \neg A$, לפי (6), (16) ו-$(\to E)$.
18. $\neg A \vee \neg B \Rightarrow A \wedge B$, לפי (5), (17) ו-$(\neg I)$.
19. $\Rightarrow (\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$, לפי (18) ו-$(\to I)$.

ומכאן: $\vdash_{NDC} (\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)$.

ב. $\vdash_{NDC} A \to (B \to A)$:

1. $\{A\} \cup \Gamma \Rightarrow A$, אקסיומה. בפרט עבור $\Gamma = \{B\}$ מתקיים: $A, B \Rightarrow A$.
2. $A \Rightarrow B \to A$, לפי (1) ו-$(\to I)$.
3. $\Rightarrow A \to (B \to A)$, לפי (2) ו-$(\to I)$.

ומכאן: $\vdash_{NDC} A \to (B \to A)$.

ג. $\vdash_{NDC} A \to (A \vee B)$:

1. $A \Rightarrow A$, אקסיומה.
2. $A \Rightarrow A \vee B$, לפי (1) ו-$(\vee I)$.
3. $\Rightarrow A \to A \vee B$, לפי (2) ו-$(\to I)$.

ומכאן: $\vdash_{NDC} A \to A \vee B$.

ד. $\vdash_{NDC} \big((A \to B) \wedge (C \to D)\big) \to \big((A \vee C) \to (B \vee D)\big)$:

1. $(A \to B) \wedge (C \to D) \Rightarrow (A \to B) \wedge (C \to D)$, אקסיומה.
2. $(A \to B) \wedge (C \to D) \Rightarrow (A \to B)$, לפי (1) ו-$(\wedge E)$.
3. $A \Rightarrow A$, אקסיומה.
4. $(A \to B) \wedge (C \to D), A \Rightarrow B$, לפי (2), (3) ו-$(\to E)$.

5. $(A \to B)\wedge(C \to D), A \Rightarrow B\vee D$, לפי (4) ו-$(\vee I)$.
6. $(A \to B)\wedge(C \to D) \Rightarrow (C \to D)$, לפי (1) ו-$(\wedge E)$.
7. $C \Rightarrow C$, אקסיומה.
8. $(A \to B)\wedge(C \to D), C \Rightarrow D$, לפי (6), (7) ו-$(\to E)$.
9. $(A \to B)\wedge(C \to D), C \Rightarrow B\vee D$, לפי (8) ו-$(\vee I)$.
10. $A\vee C \Rightarrow A\vee C$, אקסיומה.
11. $A\vee C, (A \to B)\wedge(C \to D) \Rightarrow B\vee D$, לפי (5), (9), (10) ו-$(\vee E)$.
12. $\big((A \to B)\wedge(C \to D)\big) \Rightarrow (A\vee C) \to (B\vee D)$, לפי (11) ו-$(\to I)$.
13. $\Rightarrow \big((A \to B)\wedge(C \to D)\big) \to \big((A\vee C) \to (B\vee D)\big)$, לפי (12) ו-$(\to I)$.

ומכאן: $\vdash_{NDC} \big((A \to B)\wedge(C \to D)\big) \to \big((A\vee C) \to (B\vee D)\big)$.

ה. $\vdash_{NDC} \big((A\wedge B) \to C\big) \to (A \to C)\vee(B \to C)$: לא נפתר.

ו. $\vdash_{NDC} \big((A \to C)\vee(B \to C)\big) \to \big((A\wedge B) \to C\big)$:

1. $(A \to C)\vee(B \to C) \Rightarrow (A \to C)\vee(B \to C)$, אקסיומה.
2. $A \Rightarrow A$, אקסיומה.
3. $A \to C \Rightarrow A \to C$, אקסיומה.
4. $(A \to C), A \Rightarrow C$, לפי (2), (3) ו-$(\to E)$.
5. $B \Rightarrow B$, אקסיומה.
6. $B \to C \Rightarrow B \to C$, אקסיומה.
7. $(B \to C), B \Rightarrow C$, לפי (5), (6) ו-$(\to E)$.
8. $(A \to C)\vee(B \to C), A, B \Rightarrow C$, לפי (1), (4), (7) ו-$(\vee E)$.
9. $(A \to C)\vee(B \to C), A \Rightarrow B \to C$, לפי (8) ו-$(\to I)$.
10. $(A \to C)\vee(B \to C) \Rightarrow A \to (B \to C)$, לפי (9) ו-$(\to I)$.
11. $(A \to C)\vee(B \to C), A\wedge B \Rightarrow A\wedge B$, אקסיומה.
12. $(A \to C)\vee(B \to C), A\wedge B \Rightarrow A$, לפי (11) ו-$(\wedge E)$.
13. $(A \to C)\vee(B \to C), A\wedge B \Rightarrow B$, לפי (11) ו-$(\wedge E)$.
14. $(A \to C)\vee(B \to C), A\wedge B \Rightarrow B \to C$, לפי (10), (12) ו-$(\to E)$.
15. $(A \to C)\vee(B \to C), A\wedge B \Rightarrow C$, לפי (13), (14) ו-$(\to E)$.
16. $(A \to C)\vee(B \to C) \Rightarrow (A\wedge B) \to C$, לפי (15) ו-$(\to I)$.
17. $\Rightarrow \big((A \to C)\vee(B \to C)\big) \to \big((A\wedge B) \to C\big)$, לפי (16) ו-$(\to I)$.

ומכאן: $\vdash_{NDC} \big((A \to C)\vee(B \to C)\big) \to \big((A\wedge B) \to C\big)$.

(2) לא נפתר.

(3)

להלן המשך ההוכחה של משפט התקפות של מערכת NDC. בכיתה ראינו את ההוכחה עבור כלל ההיסק $(\vee E)$, להלן הוכחה לשאר:

$\underline{(\vee I)_1}$: נניח $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$. לפי הנחת האינדוקציה, $\Gamma \vdash_{CPL} A$. נראה כי $\Gamma \vdash_{CPL} A\vee B$: יהי v מודל של Γ. כיוון ש-$\Gamma \vdash_{CPL} A$, אז $v \vDash A$. ברור כי $A \vdash_{CPL} A\vee B$, כי כל מודל של A הוא בפרט או מודל של A או מודל של B. לפיכך $v \vDash A\vee B$, ולכן $\Gamma \vdash_{CPL} A\vee B$.

$\underline{(\vee I)_2}$: נניח $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow B$. לפי הנחת האינדוקציה, $\Gamma \vdash_{CPL} B$. נראה כי $\Gamma \vdash_{CPL} A\vee B$: יהי v מודל של Γ. כיוון ש-$\Gamma \vdash_{CPL} B$, אז $v \vDash B$. ברור כי $B \vdash_{CPL} A\vee B$, כי כל מודל של B הוא בפרט או מודל של A או מודל של B. לפיכך $v \vDash A\vee B$, ולכן $\Gamma \vdash_{CPL} A\vee B$.

$\underline{(\wedge I)}$: נניח $\vdash_{NDC} \Gamma_1 \Rightarrow A$, $\vdash_{NDC} \Gamma_2 \Rightarrow B$. נראה כי $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash_{CPL} A\wedge B$. לה״א $\Gamma_1 \vdash_{CPL} A$ ו-$\Gamma_2 \vdash_{CPL} B$. לכן, כל מודל של Γ_1 הוא מודל של A, וכל מודל של Γ_2 הוא מודל של B. יהי v מודל של $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. ממונוטוניות CPL נקבל כי $v \vDash \Gamma_1$ וגם $v \vDash \Gamma_2$. לפיכך v מודל של A וגם מודל של B, ולכן v מודל של $A\wedge B$. מכאן: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash_{CPL} A\wedge B$.

$(\wedge E)_{1,2}$: נניח $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A \wedge B$. נראה כי $\Gamma \vdash_{CPL} A, \Gamma \vdash_{CPL} B$: להי"א, $\Gamma \vdash_{CPL} A \wedge B$ ולכן כל מודל של Γ הוא מודל של $A \wedge B$. יהי v מודל של Γ, אז $v \vDash A \wedge B$. כיוון ש-v מודל של $A \wedge B$, אז v גם מודל של A וגם מודל של B. לפיכך כל מודל של Γ הוא מודל של A וגם מודל של B, ולכן $\Gamma \vdash_{CPL} A$, $\Gamma \vdash_{CPL} B$.

$(\rightarrow I)$: נניח $\vdash_{NDC} \{A\} \cup \Gamma \Rightarrow B$. נראה כי $\Gamma \vdash_{CPL} A \rightarrow B$: להי"א, $\{A\} \cup \Gamma \vdash_{CPL} B$. לפי משפט הדדוקציה של CPL מתקיים $\Gamma \vdash_{CPL} A \rightarrow B$.

$(\rightarrow E)$: נניח $\vdash_{NDC} \Gamma_1 \Rightarrow A, \vdash_{NDC} \Gamma_2 \Rightarrow A \rightarrow B$. נראה כי $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash_{CPL} B$: להי"א $\Gamma_1 \vdash_{CPL} A, \Gamma_2 \vdash_{CPL} A \rightarrow B$. לפי משפט הדדוקציה $\Gamma_2 \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$. יהי v מודל של $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. ממונוטוניות CPL נקבל כי $v \vDash \Gamma_1, v \vDash \Gamma_2$. כיוון ש-$\Gamma_1 \vdash_{CPL} A$ אז $v \vDash A$. כיוון שגם $v \vDash \Gamma_2$ אז מתקיים $v \vDash \Gamma_2 \cup \{A\}$, וכיוון ש-$\Gamma_2 \cup \{A\} \vdash_{CPL} B$ אז $v \vDash B$. מכאן: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash_{CPL} B$.

$(\neg I)$: נניח $\vdash_{NDC} \Gamma_1 \cup \{A\} \Rightarrow B, \vdash_{NDC} \Gamma_2 \cup \{A\} \Rightarrow \neg B$. נראה כי $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash_{CPL} \neg A$: להי"א $\Gamma_1 \cup \{A\} \vdash_{CPL} B, \Gamma_2 \cup \{A\} \vdash_{CPL} \neg B$. יהי v מודל של $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. נניח כי בשלילה ש-v מודל של A. ממונוטוניות CPL, כיוון ש-v מודל של $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ אז v מודל של Γ_1 וגם של Γ_2. לפי הנחה נובע כי v מודל של B, לפיכך $v(B) = t$. כמו כן נובע כי v מודל של $\neg B$ ולכן $v(\neg B) = \neg^* v(B) = t$, ולכן $v(B) = f$, בסתירה. לפיכך v אינו מודל של A, כלומר $v(A) = f$. מכאן ש-$\neg^* v(A) = t$ ולכן $v(\neg A) = t$. לפיכך v מודל של $\neg A$. מכאן: $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash_{CPL} \neg A$.

$(\neg E)$: נניח $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow \neg\neg A$. נראה כי $\Gamma \vdash_{CPL} A$: להי"א $\Gamma \vdash_{CPL} \neg\neg A$. ממשפט השלמות של HPC נובע כי $\Gamma \vdash_{HPC} \neg\neg A$. לפיכך, קיימת ל-$\neg\neg A$ סדרת הוכחה ב-HPC מ-Γ שנסמנה $\varphi_1, \dots, \varphi_n = \neg\neg A$. נראה הוכחה ש-$\Gamma \vdash_{HPC} A$. נבנה סדרת הוכחה ל-$A$ מ-Γ ב-HPC:
$\varphi_1, \dots, \varphi_n = \neg\neg A, \neg\neg A \rightarrow A, A$, כאשר A מתקבל מ-$\neg\neg A$, $\neg\neg A \rightarrow A$ $(N2)$ ו-MP. לפיכך $\Gamma \vdash_{HPC} A$. ממשפט התקפות של HPC נובע $\Gamma \vdash_{CPL} A$, כנדרש.

(4)

בכיתה ראינו כי $(\neg I), (\neg E)$ (מסומנים $(N1), (N2)$) נגזרים מ-NDC'. נראה כעת כי $(N1'), (N2')$ נגזרים מ-NDC:

א. $(N1')$:

תחילה נציין כי עבור קבוצת נוסחאות $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ מתקיים: $\Gamma \Rightarrow A \Leftrightarrow \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \Rightarrow A$.

אם $\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \Rightarrow A$: לפי $(\rightarrow I)$ מתקיים $(1) \Rightarrow (\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n) \rightarrow A$. כמו כן, $\Gamma \Rightarrow \gamma_i . \forall i \in \{1, \dots, n\}$, כיוון שזו אקסיומה. לפי החלת כלל $(\wedge I)$ כ-$n-1$ פעמים, נקבל: $(2) \Gamma \Rightarrow \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n$. לפי כלל $(\rightarrow E)$ על $(1), (2)$ נקבל כי $\Gamma \Rightarrow A$.

אם $\Gamma \Rightarrow A$: לפי החלת $(\rightarrow I)$ כ-n פעמים נקבל $(1) \Rightarrow \gamma_1 \rightarrow (\gamma_2 \rightarrow (\dots (\gamma_n \rightarrow A) \dots))$. לפי $(\wedge E)$: $(2_i) \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \Rightarrow \gamma_i . \forall i \in \{1, \dots, n\}$. לפי החלת כלל $(\rightarrow E)$ כ-n פעמים על $(1), (2_i)$ (i רץ מ-1 עד n) נקבל כי $\gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \Rightarrow A$.

לפיכך, מספיק להוכיח ל-$\Gamma_1 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \Gamma_2 = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ שאם $\gamma := \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_n \Rightarrow A$ ו-$\delta := \delta_1 \wedge \dots \wedge \delta_m \Rightarrow \neg A$ אז $\{\gamma, \delta\} \Rightarrow B$.

1. $\{\gamma\} \Rightarrow A$, הנחה.
2. $\Rightarrow \gamma \rightarrow A$, לפי (1) ו-$(\rightarrow I)$.
3. $\{\neg B, \gamma\} \Rightarrow \gamma$, אקסיומה.
4. $\{\neg B, \gamma\} \Rightarrow A$, לפי (2), (3) ו-$(\rightarrow E)$.
5. $\delta \Rightarrow \neg A$, הנחה.
6. $\Rightarrow \delta \rightarrow \neg A$, לפי (5) ו-$(\rightarrow I)$.
7. $\{\neg B, \delta\} \Rightarrow \delta$, אקסיומה.
8. $\{\neg B, \delta\} \Rightarrow \neg A$, לפי (6), (7) ו-$(\rightarrow E)$.
9. $\{\gamma, \delta\} \Rightarrow \neg\neg B$, לפי (4), (8) ו-$(\neg I)$.
10. $\{\gamma, \delta\} \Rightarrow B$, לפי (9) ו-$(\neg E)$.

ומכאן שאם $\Gamma_1 \Rightarrow A, \Gamma_2 \Rightarrow \neg A$ אז $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B$.

ב. $(N2')$:

צריך להראות ש-$\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A \vee \neg A$. לפי משפט השלמות של NDC (כפי שנראה בהרצאה), מספיק להוכיח כי $\Gamma \vdash_{CPL} A \vee \neg A$. יהי v מודל של Γ, נראה כי v מודל של $A \vee \neg A$. האפשרות הראשונה היא ש-$v(A) = t$, אז v מודל של A. בפרט v מודל או של A או של $\neg A$, כלומר $v \vDash A \vee \neg A$. האפשרות השניה היא ש-$v(A) = f$, ולכן $v(\neg A) = \neg^* v(A) = t$, כלומר v מודל של $\neg A$. בפרט v מודל של A או של $\neg A$, כלומר $v \vDash A \vee \neg A$.
בכל מקרה קיבלנו כי v מודל של $A \vee \neg A$, ולכן $\Gamma \vdash_{CPL} A \vee \neg A$. לפי משפט השלמות של NDC נובע כי $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A \vee \neg A$.