<u>**לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית 4#**</u>

אריאל סטולרמן

(1)

א. אם T קונסיסטנטית, $T \vdash_{HPC} A$ אז $T\cup\{A\}$ קונסיסטנטית:

תהי T תורה קונסיסטנטית, אזי קיים B כך ש-$T \nvdash_{HPC} B$, כלומר B לא יכיח מ-T. נניח גם כי $T \vdash_{HPC} A$. טענה: אותו B מקודם גם אינו יכיח מ-$T\cup\{A\}$. נניח בשלילה כי $T \nvdash_{HPC} B$ וגם $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} B$. כיוון ש-$B$ יכיח מ-$T\cup\{A\}$ אז קיימת סדרת הוכחה ל-B מ-$T\cup\{A\}$ והיא $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = B$. כיוון ש-$T \vdash_{HPC} A$ אז קיימת ל-A סדרת הוכחה מ-T והיא $\psi_1, \ldots, \psi_m$. מכאן, שניתן לבנות ל-B סדרת הוכחה מ-T בלבד ע"י שרשור שתי הסדרות (הוכחת A תחילה ואז המשך להוכחת B) לסדרה $\psi_1, \ldots, \psi_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n = B$, וכך נקבל כי $T \vdash_{HPC} B$, בסתירה להנחה. לפיכך $T\cup\{A\} \nvdash_{HPC} B$ ולכן $T\cup\{A\}$ קונסיסטנטית מהגדרה, כנדרש.

ב. $T \vdash_{HPC} \neg A \Leftrightarrow T\cup\{A\}$ אינה קונסיסטנטית ב-HPC:

נניח תחילה כי $T \vdash_{HPC} \neg A$, ולכן קיימת סדרת הוכחה ל- $\neg A$ מ-T: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \neg A$. נראה כי $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} \neg A$ וגם $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} A$: $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} \neg A$ כיוון ש-$\neg A$ יכיח ע"י אותה סדרת הוכחה מ- $T \subseteq T\cup\{A\}$, שהיא $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \neg A$. $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} A$ - טרוויאלי, A יכיח ע"י סדרת ההוכחה באורך אחד והיא A. לפיכך, כיוון ש-A וגם $\neg A$ יכיחים מ-$T\cup\{A\}$, אזי תורה זו אינה קונסיסטנטית.

נניח כעת כי $T\cup\{A\}$ אינה קונסיסטנטית. בסעיף א' הוכח: אם T קונסיסטנטית וגם $T \vdash_{HPC} A$ אז $T\cup\{A\}$ קונסיסטנטית. ביטוי זה שקול לביטוי: אם $T\cup\{A\}$ אינה קונסיסטנטית אז או ש- $T \nvdash_{HPC} A$ או ש-T אינה קונסיסטנטית. אם T אינה קונסיסטנטית, אז באופן מיידי: $T \vdash_{HPC} \neg A$ (לכל נוסחה). אם T קונסיסטנטית, אז חייב להתקיים $T \nvdash_{HPC} A$. אם האחרון מתקיים, וידוע כי $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} A$, $T\cup\{A\}$ אינה קונסיסטנטית, ו-T כן קונסיסטנטית, אז הוספת A לתורה T הוא שהפך את $T\cup\{A\}$ ללא קונסיסטנטית, ומכאן שלפני הוספת A התקיים $T \vdash_{HPC} \neg A$ (ולאחר הוספת A מתקיים גם $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} A$ וגם $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} \neg A$, ומכאן אי הקונסיסטנטיות של $T\cup\{A\}$). לכן בכל מקרה אם $T\cup\{A\}$ אינה קונסיסטנטית, אז $T \vdash_{HPC} \neg A$.

ג. $T \vdash_{HPC} A \Leftrightarrow T\cup\{\neg A\}$ אינה קונסיסטנטית ב-HPC:

הוכחה באופן דומה לסעיף הקודם, רק להחליף כל מופע של A במופע של $\neg A$ ולהיפך.

ד. אם T קונסיסטנטית אז לפחות אחת מבין $T\cup\{A\}$, $T\cup\{\neg A\}$ קונסיסטנטית:

נניח כי T קונסיסטנטית, אזי לכל A מתקיים: או $T \nvdash_{HPC} A$ או $T \nvdash_{HPC} \neg A$. מסעיפים ב', ג' נובע כי $T\cup\{A\}$ אינה קונסיסטנטית אמ"מ $T \vdash_{HPC} \neg A$, וזה שקול לכך ש- $T\cup\{A\}$ קונסיסטנטית אמ"מ $T \nvdash_{HPC} \neg A$; $T\cup\{\neg A\}$ אינה קונסיסטנטית אמ"מ $T \vdash_{HPC} A$ וזה שקול לכך ש- $T\cup\{A\}$ קונסיסטנטית אמ"מ $T \nvdash_{HPC} A$. כיוון שאו $T \nvdash_{HPC} A$ או $T \nvdash_{HPC} \neg A$, אז או $T\cup\{\neg A\}$ קונסיסטנטית או $T\cup\{A\}$ קונסיסטנטית.

(2)

לכל השמה v הקבוצה $\{A | v(A) = t\}$ היא קונסיסטנטית: **הטענה נכונה**

נסמן את הקבוצה כ-T. נניח כי T אינה קונסיסטנטית, אזי קיים B כך ש-$T \vdash_{HPC} B, T \vdash_{HPC} \neg B$. ממשפט התקיפות נובע כי $T \vdash_{CPL} B, T \vdash_{CPL} \neg B$. מכאן שכל מודל של T הוא גם מודל של $B, \neg B$. מהגדרת T, v מהווה מודל של T ולכן v מודל של B וגם של $\neg B$. לפיכך, $v(B) = t$ ולכן $v(\neg B) = f$, אך כמו כן $v(\neg B) = t$ וזו סתירה. לפיכך T היא קונסיסטנטית.

(3)

טענה: תחת הסמנטיקה החדשה משפט התקפות לא מתקיים

נראה כי קיימת תורה T ונוסחה φ כך ש-$T \vdash_{HPC} \varphi$ וגם $T \nvdash_{CPL} \varphi$:

תהי $T = \{A \to B\}$ תורה. נראה כי $T \vdash_{HPC} ((A \to \neg B) \to \neg A)$:

1. $A \to B,$ הנחה
2. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A),$ *N1*
3. $((A \to \neg B) \to \neg A),$ *MP, 1, 2*

כעת נראה כי קיימת השמה v המהווה מודל ל- T ואינה מודל ל- $((A \to \neg B) \to \neg A)$: תהי v השמה כך ש- $v(A) = f, v(B) = f$. ברור כי $v(A \to B) = t$ ולכן v מודל של T. לעומת זאת: $v(A \to \neg B) = \to^* \big(v(A), v(\neg B)\big) = \to^* \big(v(A), v(B)\big) = t$ וגם $v(\neg A) = v(A) = f$, ולכן $v\big((A \to \neg B) \to \neg A\big) = f$, ולפיכך v אינה מודל ל-$((A \to \neg B) \to \neg A)$. לכן $T \nvdash_{CPL} ((A \to \neg B) \to \neg A)$.

מכאן כי קיימת תורה T ונוסחה φ כך ש-$T \vdash_{HPC} \varphi$ וגם $T \nvdash_{CPL} \varphi$ ולכן משפט התקפות אינו תקף תחת הסמנטיקה החדשה.

(4)

לקבוצת אנשים נתונה A (סופית או אינסופית), נגדיר קבוצת פסוקים אטומיים $\{P_{u,w} | u,w \in A\} \cup \left\{P_u^i \mid u \in A, i \in \{1,2\}\right\}$:

- $P_{u,w}$ יקבל t אמ"מ u,w שכנים.
- P_u^i יקבל t אמ"מ u שייך לקהילה A_i.

ניצור תורה T (סופית או אינסופית), $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, כך ש-$T$ ספיקה אמ"מ A היא קבוצה דו-קהילתית:

- $T_1 = \{(P_u^1 \vee P_u^2) | u \in A\}$ - כל איש בקבוצה A שייך לפחות לאחת משתי הקהילות A_1, A_2.
- $T_2 = \{(P_u^i \wedge P_w^i) \to P_{u,w} | u,w \in A, i \in \{1,2\}\}$ - אם שני אנשים נמצאים באותה קהילה אזי הם שכנים.
- $T_3 = \left\{P_{u,w} \mid u,w \in A, \text{שכנים } u,w\right\} \cup \{\neg P_{u,w} \mid u,w \in A, \text{אינם שכנים } u,w\}$.

הוכחה ש-A דו קהילתית אמ"מ T ספיקה:

נניח תחילה כי A דו קהילתית, אזי קיימות שתי קבוצות $A_1, A_2 \subseteq A$ כך ש-$\forall u \in A. u \in A_1 \cup A_2$. נגדיר את ההשמה v באופן הבא:

$$v(P_u^i) = \begin{cases} t, & u \in A_i \\ f, & u \notin A_i \end{cases}, \quad v(P_{u,w}) = \begin{cases} t, & \text{שכנים } u,w \\ f, & \text{אינם שכנים } u,w \end{cases}$$

נראה כי השמה זו מהווה מודל ל-T. יהי P פסוק ב-T, אז הוא אחד מהבאים:

- $(P_u^1 \vee P_u^2)$: כיוון שכל איש שייך לאחת מבין הקהילות A_1, A_2 אז לפחות אחד מבין P_u^1, P_u^2 יקבל t לכל $u \in A$, ולכן $v(P_u^1 \vee P_u^2) = t$.
- $P_{u,w}$, u,w שכנים: כיוון שהם שכנים אז מהגדרת v: $v(P_{u,w}) = t$.
- $\neg P_{u,w}$, u,w אינם שכנים: כיוון שאינם שכנים אז מהגדרת v: $v(P_{u,w}) = f$ ולכן $v(\neg P_{u,w}) = t$.
- $(P_u^i \wedge P_w^i) \to P_{u,w}$: אם $v(P_u^i \wedge P_w^i) = t$ אז u,w שייכים לאותה קהילה, ומהגדרה הם שכנים, לכן $v(P_{u,w}) = t$, ולכן $v\left((P_u^i \wedge P_w^i) \to P_{u,w}\right) = t$.

כיוון ש-v מספקת כל פסוק ב-T, אזי v היא מודל של T ולכן T ספיקה.

נניח כעת כי T ספיקה. נוכיח ש-A דו קהילתית ע"י בניית A_1, A_2 מתאימות. כיוון ש-T ספיקה, תהי v ההשמה המספקת אותה:

$$A_1 = \{u \mid v(P_u^1) = t, u \in A\}, A_2 = \{u \mid v(P_u^2) = t, u \in A\}$$

- כל $u \in A$ שייך לאחת מבין A_1, A_2 לפחות: כיוון ש-v מספקת את T, ולכל $u \in A$ יש ב-T פסוק $(P_u^1 \vee P_u^2)$, אז $v(P_u^1 \vee P_u^2) = t$, ולכן $v(P_u^1) \vee v(P_u^2) = t$, ומהגדרת A_1, A_2: או $u \in A_1$ או $u \in A_2$ (או שניהם).
- כל שני אנשים הנמצאים באותה קבוצה A_1 או A_2 הם שכנים: יהיו $u,w \in A_i$ עבור $i \in \{1,2\}$, לכן $v(P_u^i) \wedge v(P_w^i) = v(P_u^i \wedge P_w^i) = t$, וכיוון ש-$(P_u^i \wedge P_w^i) \to P_{u,w}$ ב-T, אז גם $v(P_u^i \wedge P_w^i) \to P_{u,w} = t$. מכאן ש- $v(P_{u,w})$ חייב לקבל ערך t, ומהגדרת v, u,w הם שכנים.

כיוון שכל שני אנשים שייכים לפחות לאחת מבין A_1, A_2, וכל שני אנשים באותה קבוצה הם שכנים, אז A היא דו קהילתית.

<u>טענה: A דו קהילתית אמ"מ כל תת קבוצה סופית שלה היא דו קהילתית</u>:

נניח תחילה כי A דו קהילתית, אזי התורה T כמוגדרת לעיל ספיקה. תהי $A' \subseteq A$ תת קבוצה סופית כלשהי של A, ותהי $T' \subseteq T$ תת התורה המתאימה לה הבנויה באופן הבא:

- $(P_u^1 \vee P_u^2) \in T'$ אמ"מ $u \in A'$.
- $P_{u,w} \in T'$ אמ"מ $u,w \in A'$.
- $\neg P_{u,w} \in T'$ אמ"מ $u,w \in A'$.
- $(P_u^i \wedge P_w^i) \to P_{u,w} \in T'$ אמ"מ $u,w \in A'$.

הבהרה: כדי לשמור על T' סופית, אנו נתעלם ולא נשים ב-T' פסוקים למשל מהצורה $P_{u,q}$ כאשר $u \in A', q \notin A'$. כיוון ש-A' תת קבוצה סופית, אז מההגדרה לעיל גם $T' \subseteq T$ תורה סופית, ולכן לפי משפט הקומפקטיות כיוון ש-T ספיקה אז גם T' ספיקה. מהטענה שהוכחה לעיל נובע כי לפיכך A' היא קבוצה דו קהילתית, לכל $A' \subseteq A$ סופית.

נניח כעת כי כל $A' \subseteq A$ קבוצה סופית היא דו קהילתית. ברור כי $A = \bigcup_{|A'|<\infty} A'$ (כל $u \in A'$ שייך גם ל-A מהגדרת A' כתת קבוצה של A, ולכל $u \in A$ קיימת באיחוד תת קבוצה סופית של A המכילה את u, למשל $\{u\}$). תהי T התורה המתאימה לקבוצה A כמוגדר לעיל. תהי $T' \subseteq T$ התורה המתאימה ל-A' כמוגדר קודם (T' סופית). ברור כי $T = \bigcup T'$ (לכל פסוק ב-T ניתן לבחור קבוצה $A' \subseteq A$ כך שהתורה T' המתאימה לה תכיל את

אותו פסוק, והכלה בכיוון השני ברורה). כיוון שכל A' דו קהילתית מהנחה, אז מהטענה שהוכחה לעיל נובע שכל T' ספיקה. ממשפט הקומפקטיות נובע כי T תורה ספיקה, ומהטענה שהוכחה לעיל נובע כי A קבוצה דו קהילתית.

מכאן, A היא דו קהילתית אמ"מ כל תת קבוצה סופית $A' \subseteq A$ היא דו קהילתית, כנדרש.

(5)

נבנה את הקבוצה הבאה : $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{\neg p_i \mid i \in \mathbb{N}_{even}\}$. Σ דו ספיקה אמ"מ $\bar{\Sigma}$ ספיקה: אם Σ דו ספיקה, אז קיימת השמה v כך ש- $v \vDash \Sigma$ וגם $v(p_i) = f$ לכל $i \in \mathbb{N}_{even}$, ולכן $v(\neg p_i) = t$ לכל $i \in \mathbb{N}_{even}$. מכאן ש-$v \vDash \bar{\Sigma}$. כמו כן, אם $\bar{\Sigma}$ ספיקה, אז קיימת השמה v כך ש-$v \vDash \bar{\Sigma}$. כיוון שלכל $i \in \mathbb{N}_{even}$ מתקיים $\neg p_i \in \bar{\Sigma}$ ו-v מספקת אותה אז $v(p_i) = f$ לכל $i \in \mathbb{N}_{even}$. $\Sigma \subseteq \bar{\Sigma}$, ולכן $v \vDash \Sigma$. סה"כ קיבלנו כי Σ היא דו ספיקה ע"י v. אם כן מתקיים: Σ ספיקה אמ"מ $\bar{\Sigma}$ ספיקה. לפי משפט הקומפקטיות, האחרונה ספיקה אמ"מ כל $\bar{\Sigma}' \subseteq \bar{\Sigma}$ סופית היא ספיקה. מהטענה לעיל נובע כי כל $\bar{\Sigma}'$ ספיקה אמ"מ כל $\Sigma' = \bar{\Sigma}' \setminus \{\neg p_i | i \in \mathbb{N}_{even}\}$ דו ספיקה. מכאן ש-Σ דו ספיקה אמ"מ כל $\Sigma' \subseteq \Sigma$ סופית דו ספיקה.