לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית #3

אריאל סטולרמן

(1)

להלן הוכחה לכך ש-$\vdash_{HPC}$ הוא יחס נביעה:

א. רפלקסיביות: נוכיח כי אם $A \in T$ אז $T \vdash_{HPC} A$: ניקח את סדרת ההוכחה באורך 1 שהיא A. סדרה זו חוקית שכן $A \in T$.

ב. מונוטוניות: נוכיח כי אם $T_1 \vdash_{HPC} A$ ו-$T_1 \subseteq T_2$ אז $T_2 \vdash_{HPC} A$: תהי $\varphi_1, \dots, \varphi_n = A$ סדרת ההוכחה של A מ-T_1. ניקח את אותה סדרת הוכחה מ-T_2, וסדרת הוכחה זו חוקית שכן מורכבת מאקסיומות, איברים ב-T_1 שהם גם איברים ב-T_2 ($T_1 \subseteq T_2$) ומפסוקים קודמים ע"י כללי היסק. לפיכך $\varphi_1, \dots, \varphi_n = A$ היא הוכחה ל-A גם מ-T_2 ולכן $T_2 \vdash_{HPC} A$.

ג. טרנזיטיביות: נוכיח כי אם $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} B$ וגם $T \vdash_{HPC} A$ אז $T \vdash_{HPC} B$: $T\cup\{A\} \vdash_{HPC} B$ ולכן קיימת סדרת הוכחה ל- B מ-$T\cup\{A\}$ ב-HPC מהצורה $\varphi_1, \dots, \varphi_n = B$ המשתמשת בהנחה A. כמו כן נתון כי $T \vdash_{HPC} A$ ולכן קיימת סדרת הוכחה ל- A מ-T מהצורה $\psi_1, \dots, \psi_n = A$. לפיכך ניתן לבנות ל-$B$ את סדרת ההוכחה מ-T מהצורה $\psi_1, \dots, \psi_n = A, \varphi_1, \dots, \varphi_n = B$, והיא חוקית שכן כל שימוש ב-A בחלק $\varphi_1, \dots, \varphi_n = B$ חוקי על סמך שימוש בפסוקים קודמים ע"י כלל ההיסק MP. לכן $T \vdash_{HPC} B$.

מקיום שלוש התכונות הנ"ל נובע כי $\vdash_{HPC}$ הוא יחס נביעה, כנדרש.

(2)

HPC' זהה ל-HPC מלבד החלפת $N1, N2$ באקסיומה: $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$ (N). נוכיח שקילות שתי המערכות ע"י מציאת הוכחה ל-$N1$ $N2$ ב-HPC' ומציאת הוכחה ל-N ב-HPC.

א. הוכחה ל-$N2$: ניתנה בתרגול.

(3)

א. $(\neg A \to B), (A \to B) \vdash_{HPC} B$:

הביטוי הנ"ל שקול ל: $(A \to B), (\neg A \to B) \vdash_{HPC} B$.

לפי משפט הדדוקציה: $(A \to B), (\neg A \to B) \vdash_{HPC} B \Leftrightarrow (A \to B) \vdash_{HPC} \big((\neg A \to B) \to B\big) \Leftrightarrow\ \vdash_{HPC} (A \to B) \to \big((\neg A \to B) \to B\big)$. החלק הימני ביותר זהה ללמה שנלמדה בתרגול, כלומר זהו משפט של המערכת ולכן מתקיים.

ג. $\vdash_{HPC} \big(A \to (B \to C)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)$:

לפי משפט הדדוקציה מספיק להוכיח כי $\big(A \to (B \to C)\big) \vdash_{HPC} \big(B \to (A \to C)\big)$, ואף $\big(A \to (B \to C)\big), B \vdash_{HPC} (A \to C)$:

1. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$, לפי $I2$.
2. $A \to (B \to C)$, לפי הנחה.
3. $(A \to B) \to (A \to C)$, לפי MP,1,2.
4. $B \to (A \to B)$, לפי $I1$.
5. B, לפי הנחה.
6. $A \to B$, לפי MP,4,5.
7. $A \to C$, לפי MP,3,6.

(4)

האקסיומות בתחשיב $L4$:

- $A \to (B \to (A \land B))$
- $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \land B) \to C))$
- $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

להלן הוכחה למשפט התקפות ל-$L4$: נראה כי מתקיים $T \vdash_{L4} \varphi \Leftarrow T \vdash_{CPL} \varphi$. נניח כי $T \vdash_{L4} \varphi$:

א. אם $\varphi \in T$, אז מהגדרת $\vdash_{CPL}$ מתקיים כי $T \vdash_{CPL} \varphi$, כיוון שכל מודל של T הוא בהכרח מודל של כל איבר שלה.

ב. אם φ היא אקסיומה של $L4$, נראה ש-$\vdash_{L4}\varphi$:

- $\varphi = A \to (B \to (A \wedge B))$:

מתקיים : $A \to (B \to (A\wedge B)) \equiv \neg A \vee (\neg B \vee (A\wedge B)) \equiv \neg A \vee \neg B \vee (A\wedge B)$. נבדוק את כל ערכי A,B האפשריים :

A	B	$\neg \boldsymbol{A}$	$\neg \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A\wedge B}$	φ
t	t	f	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
t	f	f	$\boldsymbol{t}$	f	$\boldsymbol{t}$
f	t	$\boldsymbol{t}$	f	f	$\boldsymbol{t}$
f	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	f	$\boldsymbol{t}$

ניתן לראות מטבלת האמת שלכל השמה v מתקיים $v(\varphi) = t$, ולכן φ טאו׳. בפרט $v(\varphi) = t$ לכל מודל v של T, ולכן $T \vdash_{CPL} \varphi$.

- $\varphi = (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A\wedge B) \to C))$:

מתקיים :

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A\wedge B) \to C)) \equiv \neg(\neg A \vee C) \vee (\neg(\neg B \vee C) \vee (\neg(A\wedge B) \vee C)) \equiv$$

$$(A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee \neg B \vee C$$

A	B	$\boldsymbol{C}$	$\neg \boldsymbol{A}$	$\neg \boldsymbol{B}$	$\neg C$	$\boldsymbol{A\wedge\neg C}$	$\boldsymbol{B\wedge\neg C}$	φ
t	t	$\boldsymbol{t}$	f	f	f	f	f	$\boldsymbol{t}$
t	t	f	f	f	t	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
t	f	$\boldsymbol{t}$	f	$\boldsymbol{t}$	f	f	f	$\boldsymbol{t}$
t	f	f	f	$\boldsymbol{t}$	t	$\boldsymbol{t}$	f	$\boldsymbol{t}$
f	t	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	f	f	f	f	$\boldsymbol{t}$
f	t	f	$\boldsymbol{t}$	f	t	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
f	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	f	f	f	$\boldsymbol{t}$
f	f	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	t	f	f	$\boldsymbol{t}$

ניתן לראות מטבלת האמת שלכל השמה v מתקיים $v(\varphi) = t$, ולכן φ טאו׳. בפרט $v(\varphi) = t$ לכל מודל v של T, ולכן $T \vdash_{CPL} \varphi$.

- $\varphi = (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$:

מתקיים : $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A) \equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B) \vee \neg A \equiv (A \wedge \neg B) \vee (A\wedge B) \vee \neg A$

A	B	$\neg \boldsymbol{A}$	$\neg B$	$\boldsymbol{A\wedge B}$	$\boldsymbol{A\wedge\neg B}$	φ
t	t	f	f	$\boldsymbol{t}$	f	$\boldsymbol{t}$
t	f	f	t	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
f	t	$\boldsymbol{t}$	f	f	f	$\boldsymbol{t}$
f	f	$\boldsymbol{t}$	t	f	f	$\boldsymbol{t}$

ניתן לראות מטבלת האמת שלכל השמה v מתקיים $v(\varphi) = t$, ולכן φ טאו׳. בפרט $v(\varphi) = t$ לכל מודל v של T, ולכן $T \vdash_{CPL} \varphi$.

ג. נניח $T \vdash_{CPL} B$ וגם $T \vdash_{CPL} B \to C$ ונראה כי $T \vdash_{CPL} C$:

יהי v מודל כלשהו של T. $T \vdash_{CPL} B$ ולכן v הוא גם מודל של B, כלומר $v(B) = t$. כמו כן $T \vdash_{CPL} B \to C$ ולכן v הוא גם מודל של $B \to C$, כלומר $v(B \to C) = t$. כיוון ש-$v(B) = t$, אז $v(B \to C) = t$ יתכן רק אם $v(C) = t$, כלומר v מודל גם של C. כיוון שהנ״ל מתקיים לכל v מודל של T, אז $T \vdash_{CPL} C$.

מ-א׳, ב׳, ג׳ נובע כי $T \vdash_{L4} \varphi \Leftarrow T \vdash_{CPL} \varphi$, כנדרש.