לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית 2#

אריאל סטולרמן

(1)

א. $\neg(p \to q)$:

קיים מודל לנוסחה, ולכן ספיקה: $p = t, q = f$.

לא כל השמה מספקת ולכן לא טאוטולוגיה: $p, q = t$.

ב. $\big(p \to (q \to r)\big) \equiv \neg p \vee \neg q \vee r$:

קיים מודל לנוסחה, ולכן ספיקה: $p, q, r = t$.

לא כל השמה מספקת, לכן לא טאו': $p, q = t, r = f$.

ג. $\underbrace{\neg(p \vee q)}_{:=A} \leftrightarrow \underbrace{\big(\neg(\neg p \wedge \neg q)\big)}_{:=B}$:

p	q	$\neg(p\vee q)$	$\neg p\wedge\neg q$	$\neg(\neg p\wedge\neg q)$	$A \to B$	$B \to A$	$A \leftrightarrow B$
t	t	f	f	t	t	f	f
t	f	f	f	t	t	f	f
f	t	f	f	t	t	f	f
f	f	t	t	f	f	t	f

מכאן שלא קיים מודל לנוסחה, ולכן הנוסחה אינה ספיקה ובטח שאינה טאו'.

ד. $(\neg p \to \neg q) \to \big((\neg p \to q) \to q\big)$:

$$(\neg p \to \neg q) \to \big((\neg p \to q) \to q\big) \equiv \neg\big(p \vee (\neg q)\big) \vee \big(\neg(p \vee q) \vee q\big) \equiv (\neg p \wedge q) \vee \big(\neg p \wedge (\neg q)\big) \vee q$$

p	q	$\neg p\wedge q$	$\neg p\wedge(\neg q)$	(ד)
t	t	f	f	t
t	f	f	f	f
f	t	t	f	t
f	f	f	t	t

מכאן שהנוסחה ספיקה, למשל עבור $p, q = t$, אך אינה טאו', למשל אינה ספיקה עבור $p = t, q = f$.

(2)

א. $\underbrace{(P \wedge Q) \to R}_{\equiv \neg P \vee \neg Q \vee R}, \underbrace{D \to P}_{\equiv \neg D \vee P}, D, \neg R \vdash_{CPL} \neg Q$:

P	Q	R	D	$\neg P\vee(\neg Q)\vee R$	$\neg D\vee P$	$\neg R$	$\neg Q$
t	t	t	t	t	t	f	f
t	t	t	f	f	t	f	f
t	t	f	t	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$
t	t	f	f	f	t	t	f
t	f	t	t	t	t	f	t
t	f	t	f	t	t	f	t
t	f	f	t	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
t	f	f	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$
f	t	t	t	t	f	f	f
f	t	t	f	t	t	f	f
f	t	f	t	t	f	t	f
f	t	f	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f}$
f	f	t	t	t	f	f	t
f	f	t	f	t	t	f	t
f	f	f	t	t	f	t	t
f	f	f	f	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{t}$

מטבלת האמת ניתן לראות כי קיימים ערכי אמת המהווים מודל לאגף השמאלי ואינם מודל לאגף הימני, ולכן הטענה אינה נכונה, למשל עבור הערכים בשורה השלישית: $P, Q, D = t, R = f$.

ב. $(A\wedge B) \to C \vdash_{CPL} (A \to C)\vee(B \to C)$:

$$(A\wedge B) \to C \vdash_{CPL} (A \to C)\vee(B \to C) \equiv \neg A\vee(\neg B)\vee C \ \vdash_{CPL} \underbrace{\neg A\vee C\vee(\neg B)\vee C}_{\equiv \neg A\vee(\neg B)\vee C}$$

כיוון שהאגף השמאלי שקול לוגית לאגף הימני, אזי כל מודל של האגף השמאלי הוא מודל של האגף הימני, ולכן הטענה נכונה.

ג. $A \to B, B \to C \vdash_{CPL} \neg(\neg C\wedge A)$:
ניתן לראות בטבלת האמת שכל מודל של האגף השמאלי הוא גם מודל של האגף הימני, ולכן הטענה נכונה.

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$\neg(\neg C\wedge A) \equiv C\vee(\neg A)$
t	t	t	**t**	**t**	**t**
t	t	f	t	f	f
t	f	t	f	t	t
t	f	f	f	t	f
f	t	t	**t**	**t**	**t**
f	t	f	t	f	t
f	f	t	**t**	**t**	**t**
f	f	f	**t**	**t**	**t**

ד. $A \to B \vdash_{CPL} (C\wedge A) \to (C\wedge B)$:
$(C\wedge A) \to (C\wedge B) \equiv \neg(C\wedge A)\vee(C\wedge B) \equiv \neg C\vee(\neg A)\vee(C\wedge B)$
ניתן לראות בטבלת האמת שכל מודל של האגף השמאלי הוא גם מודל של האגף הימני, ולכן הטענה נכונה.

A	B	C	$A \to B$	$\neg C\vee(\neg A)\vee(C\wedge B)$
t	t	t	**t**	**t**
t	t	f	**t**	**t**
t	f	t	f	f
t	f	f	f	t
f	t	t	**t**	**t**
f	t	f	**t**	**t**
f	f	t	**t**	**t**
f	f	f	**t**	**t**

ה. כל טאוטולוגיה היא פסוק ספיק :

הטענה נכונה. טאוטולוגיה היא פסוק שכל השמה היא מודל שלו, כלומר כל השמה היא מספקת עבור פסוק זה. בפרט, קיימת השמה כלשהי המהווה מודל לטאו', ולכן הטענה נכונה.

ו. מספיקות $A \to B, A$ נובעת ספיקות B :

הטענה אינה נכונה. נקח למשל את $A = p, B = q\wedge(\neg q)$. ניתן לספק את $A \to B$ ע"י $p = f, q = t$ (למשל) וגם את A ע"י $p = t$, אך ברור ש-B אינה ספיקה לשום ערך אמת.

ז. $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash_{CPL} B$ אמ"מ $A_1\wedge A_2 \dots \wedge A_n \vdash_{CPL} B$:

הטענה נכונה. יחס נביעה מוגדר להיות כך שכל מודל ל<u>כל</u> האגף השמאלי הוא מודל לאגף הימני, והרי מודל לתורה $A_1, A_2, \dots, A_n$ הוא מודל לפסוק $A_1\wedge A_2 \dots \wedge A_n$ (וכנ"ל בכיוון ההפוך). לכן שתי הנביעות שקולות.

(3)

להלן הוכחה שיחס $\vdash_{CPL}$ הוא יחס נביעה :

<u>רפלקסיביות</u> : נראה כי מתקיים : $A \vdash_{CPL} A$: כל מודל של A הוא מודל של עצמו, טרוויאלי. לכן $\vdash_{CPL}$ הוא רפלקסיבי.

<u>מונוטוניות</u> : נניח כי $T_1 \vdash_{CPL} A$ וגם $T_1 \subseteq T_2$, נראה כי $T_2 \vdash_{CPL} A$:

- כיוון ש-$T_1 \vdash_{CPL} A$ אז כל מודל של T_1 הוא גם מודל של A.
- כיוון ש-$T_1 \subseteq T_2$ אז כל מודל של T_2 הוא בפרט מודל של T_1 : נניח $T_1 = A_1, \dots, A_m$ ו-$T_2 = A_1, \dots, A_m, A_{m+1}, \dots, A_n$, ונניח כי הטענה לא נכונה. אזי קיים מודל ל-T_2 שאינו מודל ל-T_1. כלומר : קיים מודל ל-$A_1, \dots, A_m, \dots, A_n$ שאינו מודל ל-$A_1, \dots, A_m$, אך המודל לראשון בהכרח מהווה מודל לכל תת קבוצה מתוך $A_1, \dots, A_n$, בפרט עבור T_1, ולכן זו סתירה. מכאן שכל מודל של T_2 הוא מודל של T_1.
- כיוון שכל השמה מספקת ל-T_2 מספקת גם את T_1 וגם כל השמה מספקת ל-T_1 מספקת גם את A, אזי כל מודל של T_2 הוא מודל של A.

<u>טרנזיטיביות</u> : נניח כי $T\cup\{A\} \vdash_{CPL} B$ וגם $T \vdash_{CPL} A$, נראה כי $T \vdash_{CPL} B$: כל מודל של T הוא מן הסתם מודל ל-T (לעצמו), וכיוון ש-$T \vdash_{CPL} A$, אזי הוא גם מודל ל-A. מכאן שכל מודל ל-T הוא גם מודל ל-$T\cup\{A\}$, כלומר $T \vdash_{CPL} T\cup\{A\}$. כיוון ש-$T\cup\{A\} \vdash_{CPL} B$, אז כל מודל ל-$T\cup\{A\}$ הוא גם מודל ל-B. מכאן, שכל מודל ל-T הוא גם מודל ל-B, כלומר $T \vdash_{CPL} B$.

כיוון ש-$\vdash_{CPL}$ מקיים את כל התכונות הנ"ל, הוא יחס נביעה.

(4)

יהיו A,B נוסחאות ללא פסוקים אטומיים משותפים ו-$A \to B$ טאוטולוגיה. אזי לפחות אחד מהבאים מתקיים: B טאו׳ או $\neg A$ טאו׳.

הטענה נכונה. נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה, ונניח ש-A מורכבת מהפסוקים האטומיים $p_1, \dots, p_n$ ו-B מורכבת מהפסוקים האטומיים $q_1, \dots, q_m$. אזי קיימת השמה ל-$p_1, \dots, p_n$ שאינה מספקת את $\neg A$, וכמו כן השמה ל-$q_1, \dots, q_m$ שאינה מספקת את B. נשתמש באותה השמה לכל הפסוקים האטומיים $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m$, ונקבל השמה שאינה מספקת את $\neg A \vee B$. כיוון ש-$A \to B \equiv \neg A \vee B$, אזי קיימת השמה שאינה מספקת ל-$A \to B$, בסתירה לכך שזוהי טאוטולוגיה. מכאן שהטענה נכונה.

(5)

יהיו $A(p), B, C$ פסוקים ו-v השמה כלשהי. להלן הוכחה למשפט ההחלפה, שאם $v(B) = v(C)$ אז $v(A\{B/p\}) = v(A\{C/p\})$:

נניח כי $v(B) = v(C)$, ולהלן הוכחה באינדוקציה מבנית על $A(p)$:

- אם $A = p$, ברור: $v(A\{B/p\}) = v(B) = v(C) = v(A\{C/p\})$.
- נניח $D(p), E(p)$ פסוקים המקיימים את טענת האינדוקציה, כלומר אם $v(B) = v(C)$ אז $v(D\{B/p\}) = v(D\{C/p\})$ וגם $v(E\{B/p\}) = v(E\{C/p\})$.
  - אם $A(p) = \neg D(p)$ אז:

$$v(A\{B/p\}) = v(\neg D\{B/p\}) = \neg^* v(D\{B/p\}) = \neg^* v(D\{C/p\}) = v(\neg D\{C/p\}) = v(A\{C/p\})$$

  - אם $A(p) = D(p) \circ E(p)$ כאשר $\circ \in \{\to, \vee, \wedge\}$:

$$v(A\{B/p\}) = v(D\{B/p\} \circ E\{B/p\}) = \circ^* \left(v(D\{B/p\}), v(E\{B/p\})\right) = \circ^* \left(v(D\{C/p\}), v(E\{C/p\})\right) =$$
$$= v(D\{C/p\} \circ E\{C/p\}) = v(A\{C/p\})$$

ומכאן שהטענה נכונה, כנדרש.