לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית 1#

אריאל סטולרמן

(1)

- היום יום חמישי – a.
- הקורס בלוגיקה מתקיים היום – b.
- הקורס בלוגיקה מתקיים ביום חמישי – (בערך) שקול ל: היום יום חמישי ולכן הקורס בלוגיקה מתקיים היום – $a \Rightarrow b$.
- הקורס בלוגיקה מתקיים רק ביום חמישי – שקול ל: $a \Leftrightarrow b$.

א. הטענה: $(b \to a) \wedge b \vdash a$ – הנביעה נכונה.

ב. הטענה: $(a \to b) \wedge \neg a \vdash \neg b$ - הנביעה אינה נכונה.

ג. הטענה: $(a \Leftrightarrow b) \wedge \neg a \vdash \neg b$ - הנביעה נכונה.

ד. הטענה: $(a \to b) \wedge \neg b \vdash \neg a$ - הנביעה נכונה.

- ההתקפה המתוכננת תצליח – a.
- ההתקפה תבוא בהפתעה / האויב יופתע – b.
- העמדה מוגנת היטב – c.
- האויב בטוח מדי בעצמו – d.

ה. הטענה: $\big(a \to (b \vee \neg c)\big) \wedge (d \Leftrightarrow b) \wedge (d \to c) \vdash \neg a$ – הנביעה אינה נכונה.

ו. הטענה: $\big(a \to (b \wedge \neg c)\big) \wedge (d \Leftrightarrow b) \wedge (d \to c) \vdash \neg a$ - הנביעה נכונה.

(2)

הוכחה באינדוקציה מבנית על הנוסחה φ:

(1) אם φ פסוק אטומי אזי $Sf(\varphi) = \{\varphi\}$ ולכן $|Sf(\varphi)| = |\varphi| = 1$. כיוון ש-$\varphi$ פסוק אטומי אזי $C(\varphi) = 1$. כיוון שמתקיים $|Sf(\varphi)| = 1 \leq 2 \cdot C(\varphi) + 1 = 1$ אזי הטענה נכונה.

(2) נניח נכונות הטענה על הנוסחאות ψ_1, ψ_2.

a. אם $\varphi = \neg\psi_1$ אזי מתקיים: $C(\varphi) = C(\neg\psi_1) = C(\psi_1) + 1$, ולכן:

$$|Sf(\varphi)| = |Sf(\neg\psi_1)| = |Sf(\psi_1) \cup \{\neg\psi\}| = |Sf(\psi_1)| + 1 \leq 2 \cdot C(\psi_1) + 2 = 2 \cdot (C(\psi_1) + 1) =$$
$$= 2 \cdot C(\varphi) \leq 2 \cdot C(\varphi) + 1$$

ומכאן $|Sf(\varphi)| \leq 2 \cdot C(\varphi) + 1$ ולכן הטענה נכונה.

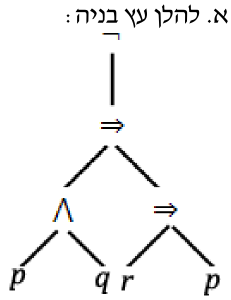
b. אם $\varphi = \psi_1 \circ \psi_2$ כאשר $\circ \in \{\to, \vee, \wedge\}$ אזי מתקיים: $C(\varphi) = C(\psi_1 \circ \psi_2) = C(\psi_1) + C(\psi_2) + 1$, ולכן:

$$|Sf(\varphi)| = |Sf(\psi_1 \circ \psi_2)| = |Sf(\psi_1) \cup Sf(\psi_2) \cup \{\psi_1 \circ \psi_2\}| = |Sf(\psi_1)| + |Sf(\psi_2)| + 1 \leq$$
$$\leq 2 \cdot C(\psi_1) + 1 + 2 \cdot C(\psi_2) + 1 + 1 = 2(C(\psi_1) + C(\psi_2) + 1) + 1 = 2 \cdot C(\varphi) + 1$$

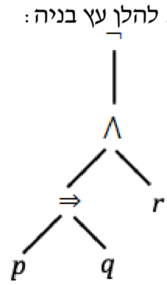
ומכאן $|Sf(\varphi)| \leq 2 \cdot C(\varphi) + 1$ ולכן הטענה נכונה.

(3)

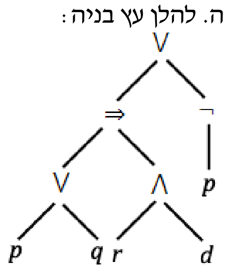
א. להלן עץ בניה:



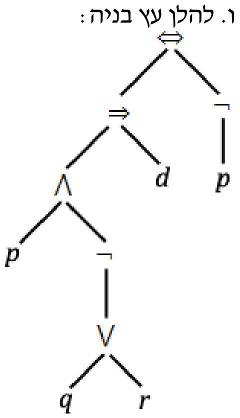
ד. להלן עץ בניה:



ה. להלן עץ בניה:



ו. להלן עץ בניה:



טענה: (ב), (ג) אינן נוסחאות. הוכחה ע״י הוכחת הטענה הבאה: בכל נוסחה (חוקית) φ, מספר הסוגרים הימניים שווה למספר הסוגרים השמאליים.

הוכחה: באינדוקציה מבנית על מבנה הנוסחה φ:

נסמן תחילה: $\ell(\varphi)$ - מספר הסוגרים השמאליים בנוסחה φ; $r(\varphi)$ - מספר הסוגרים הימניים בנוסחה φ.

(1) אם φ פסוק אטומי, אז $\ell(\varphi) = r(\varphi) = 0$.

(2) נניח נכונות הטענה עבור שתי נוסחאות ψ_1, ψ_2.

a. אם $\varphi = (\psi_1 \circ \psi_2)$, כאשר $\circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$. מתקיים: $\boldsymbol{\ell(\varphi)} = 1 + \ell(\psi_1) + \ell(\psi_2) = 1 + r(\psi_1) + r(\psi_2) = \boldsymbol{r(\varphi)}$.

b. אם $\varphi = \neg\psi_1$ אז $\boldsymbol{\ell(\varphi)} = \ell(\psi_1) = r(\psi_1) = \boldsymbol{r(\varphi)}$.

מכאן שהטענה נכונה, וכיוון ש-(ב),(ג) לא מקיימות את הטענה אזי אינן נוסחאות.