DSP / סיכומים לבוחן (20/12/09)

דברים שלא בטוח שהם חשובים מתוך דוגמאות בשיעור הראשון:

- DTMF – צליל חיוג מקשים; כאשר פקס מחייג הוא מחייג במרווחים קבועים, וקליטת אותות החיוג בנפרד מוגבלת ל10 חיוגים בשניה.
- CNG – sin ב-1100 הרץ שמפיק פקס מחייג כדי להזדהות בפני מי שאליו מתקשר כפקס.
- Answer tone – sin ב-2100 הרץ שמשמיע הצד העונה לפיו יודע הצד המחייג להפסיק את ה- CNG. ה-2100 גם מבטל את מבטלי ההדים כדי לשמור על תגובה מהירה (מבטלי הדים משמשים לתקשורת לווינית בה ה-delay גבוה).
- Hand shake – העברת המידע הראשונית בין הפקסים לאחר ה- answer tone: תחילה המחייג מעביר מידע על יכולותיו למשיב (קצב שליחה, גודל עמוד וכו׳), ולאחר מכן המשיב מחזיר לו פקודות בהתאם ליכולותיו.

מושגים חשובים:

<u>אפנון</u>: modulation: שינוי סיגנל כך שישא אינפורמציה ויעביר אותה למקום אחר.

<u>אות אנלוגי</u>: $S(t)$ היא פונקציה **ממשית** המוגדרת לכל זמן $-\infty < t < \infty$ בעלת התכונות:

- אנרגיה סופית.
- רוחב סרט סופי.

<u>אות ספרתי (דיגיטלי)</u>: s_n היא סדרה המוגדרת לכל זמן בדיד $n = -\infty, \dots, \infty$. גם כאן האות חייב להיות בעל אנרגיה וטווח סופיים.

<u>אנרגיה של אות</u>: חוזק וגודל האות, כמה עולה לחולל אותו. חישובים לאותות אנלוגיים וספרתיים:

- אנלוגי: $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$
- ספרתי: $E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2$

<u>רוחב סרט של אות</u>: כמה האות משתנה; אם לא משתנה הרוחב הוא 0.

כל ציון של אות ע״י ייצוג מהצורה $A \cdot \sin \omega t$ כוונתה לאות זה בקטע סופי מסויים, שלפניו ואחריו האות הוא אפס (אחרת האות אינו סופי). ניתן לבצע חישובים מרוכבים על אותות לשם פישוט המתמטיקה, אך כמובן שאות הוא ממשי בלבד.

<u>בדיקה האם משהו הוא סיגנל או לא</u>: לבדוק האם האנרגיה והטווח שלו סופיים, לרוב ע״י בדיקה האם מתוחמים בפרק זמן סופי.

דוגמאות לסוגי סיגנלים:

<u>סיגנל DC</u>: סיגנל קבוע; למשל $\forall n. s_n = k$. כל סיגנל שהממוצע שלו <u>אינו</u> 0, יש לו רכיב DC, למשל $a + b \cdot \sin \omega t$ הוא בעל רכיב DC a.

<u>סיגנל מדרגה</u>: מסומן $\theta(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$.

<u>סיגנל קרונקר</u>: $\delta_{n,0} = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}$. זהו סיגנל מתקף היחידה – UI (unit impulse).

דגימה:

- לקיחת דגימות של סיגנל אנלוגי וליצור מהן סיגנל דיגיטלי.
- לא כל סיגנל דיגיטלי הוא תוצר של דגימת סיגנל אנלוגי.
- <u>תדר הדגימה</u>: לרוב הדגימה תעשה בקצב קבוע שהוא תדר הדגימה.

<u>משפט לייקוסט / משפט הדגימה</u>:

אם הדגימה מהירה יותר מספקטרום התדרים של הסיגנל, אז ניתן לדגום סיגנל אנלוגי ולהפכו לדיגיטלי כך שניתן יהיה לחזור לאנלוגי באופן חד ערכי.

עוד מאפיינים לסיגנלים:

- <u>סיגנל דטרמיניסטי</u>: סיגנל שניתן לנבא את ערכו בזמן מסויים. למשל: $s(t) = \sin t$.
- <u>סיגנל סטוכסטי</u>: סיגנל שלא ניתן לנבא את ערכו. סיגנל הרעש (רעש לבן) הוא הסיגנל הסטוכסטי ביותר, ומרכיב הסטוכסטיות הוא אינפורמציה.

סיגנל יכול להיות בעל רכיבים דטרמיניסטיים, כמו רכיבי סינוס, שלא נושאים אינפורמציה וניתנים לניבוי, ובעל רכיבים סטוכסטיים.

<u>סיגנל מחזורי</u>: סיגנל דטרמניסטי המקיים:

- אנלוגי: $\exists T. \forall t. s(t+T) = s(t)$
- דיגיטלי: $\exists N. \forall n. s_{n+N} = s_n$

כאשר N / T הקטן ביותר המקיים זאת שאינו 0 הוא **המחזור** ו-$\frac{1}{T}$ / $\frac{1}{N}$ הוא **התדר**. סיגנל סטוכסטי לא יכול להיות מחזורי, אחרת היה ניתן לניבוי.

<u>סגירות לחיבור וכפל בסקאלר</u>:

אם $x^{(i)}$ הם k סיגנלים ו-a_i הם k סקאלרים אז $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ הוא גם סיגנל, או באופן פורמלי:

- אנלוגי: $\forall t. y(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^{(i)}(t)$
- דיגיטלי: $\forall n. y_n = \sum_{i=0}^{k} a_i x_n^{(i)}$

<u>הגבר</u>:

אם $y = a \cdot x$ ו-$a > 1$ אז y הוא הגבר של x כאשר האנרגיה של האות y גדלה בריבוע לעוצמת האנרגיה של האות x (משיקולי אנרגיה: $E_x = a^2 E_Y$).

אם $a < 1$ נאמר כי y הוא מנחת, שכן האות "מוקטן". אם $a < 0$ אז בהתאמה לטווח שלו ($-1 < a < 0$ או $a < -1$) האות היה מתהפך ומונחת / מוגבר.

אופרטור הקידום והפיגור בזמן:

- $\hat{z}$ הוא אופרטור הקידום בזמן, המקבל אות ומוציא אות: $y = \hat{z}x$. שרטוט: $x \rightarrow \boxed{\hat{z}} \rightarrow y$; מוגדר רק לסיגנלים ספרתיים כך: $\forall n. y_n = x_{n+1}$.
  אופרטור זה ניתן למימוש **רק עבור אותות דטרמיניסטיים**.
- $\hat{z}^{-1}$ הוא אופרטור הפיגור בזמן כך ש- $y = \hat{z}^{-1}x$ משמעו $\forall n. y_n = x_{n-1}$. מתקיים: $x = \hat{z}\left(\hat{z}^{-1}(x)\right) = \hat{z}^{-1}\left(\hat{z}(x)\right)$. ניתן למימוש גם עבור אותות דטרמיניסטיים וגם עבור סטוכסטיים, אך **דורש זיכרון**.

<u>אופרטור קוזאלי</u>: אופרטור המשתמש בזיכרון (כמו $\hat{z}^{-1}$).

מרחב הסיגנלים כמרחב וקטורי:

כיוון שמרחב סיגנלים מקיים תכונות מרחב וקטורי (קיים סיגנל ה- 0, לכל סיגנל x קיים הופכי ביחס לחיבור שהוא $-x$, סגירות לסכום וכו'), מרחב הסיגנלים האנלוגיים ומרחב הסיגנליים הדיגיטליים מהווים שני מרחבים וקטוריים (שונים).

<u>בסיס למרחב הסיגנליים</u>:

משפט: לכל מרחב וקטורי קיים (לפחות) בסיס אחד, הפורש את המרחב ומהווה קבוצה בת"ל והוא בעל ייצוג יחיד.

- בסיס למרחב הסיגנלים הדיגיטליים – הלמים מוזזים – shifted UI: $SUI^k = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0, n \neq k \\ 1, n = k \end{cases}$ עבור k כלשהו. כל סיגנל דיגיטלי יכול להיות מיוצג ע"י צירוף לינארי של בסיס זה: $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot SUI^k$.
- בסיס מרחב הסיגנלים הדיגיטליים הוא $\aleph_0$ (בן מניה) ושל מרחב הסיגנלים האנלוגיים הוא$\aleph$.

משפט פורייה:

כל פונקציה מחזורית ניתנת לחישוב כסכום משוקלל של סינוסים וסכום משוקלל של קוסינוסים: $f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin l\omega t + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos l\omega t$, כאשר $\omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{1}{T}\right)$ - המרת התדר לרדיאנים כקלט לפונ' הסינוס או הקוסינוס, רדיאנים לשניה. לפי משפט זה הקבוצה $\{\sin l\omega t\} \cup \{\cos l\omega t\}$ עבור כל l היא בסיס למרחב הפונקציות המחזוריות (פורשת אותו ובת"ל, כי המכפלה הפנימית של כל הרכיבים היא0).

<u>טרנספורם פורייה</u>:

כיוון שמשפט פורייה מתאים רק לפונ' מחזוריות, ניתן להסתכל על פונקציה שאינה מחזורית כפונקציה בעלת מחזור אינסוף. נשים לב שככל שהמחזור גדול יותר, כך התדר קטן יותר ויש צורך ביותר ויותר קווים על ציר הזמן לתיאור הסיגנל. הפונקציה השלמה בעלת מחזור ∞ היא <u>טרנספורם פורייה</u>, והיא הצגת הסיגנל **בציר התדר במקום בציר הזמן**. (טרנספורם: פעולה על מתמטית על משהו מסוג מסויים היוצרת משהו אחר מאותו סוג). סימון:

- סיגנל אנלוגי: עבור הפונקציה $s(t)$ טרנספורם הפורייה יהיה $S(\omega)$.
- סיגנל דיגיטלי: עבור הסדרה s_n טרנספורם הפורייה יהיה S_k.

מתקיים: $f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin l\omega t + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos l\omega t$ או פשוט: $f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \sin(l\omega t + \varphi_l)$ עבור $c_l = \sqrt{a_l^2 + b_l^2},\ \ \varphi_l = \tan_4^{-1}\frac{a_l}{b_l}$.

ואם נשתמש במרוכבים, כאשר $\cos \omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right), \sin \omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$ נקבל: $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \cdot e^{il\omega t}$ כאשר d_l מספר מרוכב (נסתכל רק על החלק הממשי).

<u>בסיסים בהם יעשה שימוש בנוסף לSUI</u>:

- סיגנלים אנלוגיים: $e^{i\omega t}$.
- סיגנלים דיגיטליים: $e^{i\omega n}$.

מעבר לייצוג לפי טרנספורם פורייה:

עבור סיגנל דיגיטלי DFT (טרנספורם פורייה הדיגיטלי) הוא המעבר מ- $x = \sum_n s_n SUI^n$ ל-$x = \sum_k S_k e^{ikn}$. הכיוון ההפוך הוא iDFT. עבור סיגנלים אנלוגיים: FT ו-iFT. מתקיים אם כך:

- $s_n = iDFT\big(DFT(s_n)\big) = iDFT(S_k)$
- $s(t) = iFT\Big(FT\big(s(t)\big)\Big) = iFT\big(S(\omega)\big)$

מספר דרגות החופש l נשמר במעבר, וכל האינפורמציה נשמרת. המעבר ע"י טרספורם פורייה הוא מציר הזמן לציר התדר.

ספקטרום:

טווח הצבעים המתקבל כאשר אור לבן עובר דרך פריזמה (מנסרה אופטית). האור הצבעוני הוא טרנספורם פורייה של האור הלבן (אור לבן מכיל את כל הצבעים בו באותה אנרגיה).

דגימה: מעבר מסיגנל אנלוגי לדיגיטלי נעשה ע"י דגימת הסיגנל האנלוגי בזמנים מסויימים, תהליך זה נקרא A/D (analog to digital).

משפט הדגימה:

נסתכל כל סיגנל אנלוגי בציר התדר, שהוא **הספקטרום של הסיגנל**. אם קצב הדגימה, f_s, הוא **פי 2 ומעלה** מהתדר המקסימלי בספקטרום, f, אז הדגימה לא מאבדת אינפורמציה. לפי משפט זה היחס המקסימלי $\frac{f}{f_s}$ יהיה לכל היותר $\frac{1}{2}$.

טרנספורם הילברט:

עבור סיגנל $x(t)$ ניתן לכתוב אותו באופן הבא: $x(t) = A(t)\cos\phi(t)$, כאשר:

- רוחב הסרט סופי.
- אין רכיב DC, כלומר הממוצע לאורך הזמן הוא 0.

$A(t)$ היא המשרעת/ אמפליטודה ו-$\phi(t)$ היא הפאזה (התדר הוא הנגזרת שלה).

דוגמאות לאפנון (modulation):

- רדיו AM: amplitudes modulation – אפנון של האמפליטודה: הסיגנל הבסיסי הוא $\cos\omega_{RF}t$, ונעשה עליו אפנון ע"י הכפלה ב-$A(t)$, והסיגנל המאופנן הוא זה שמשודר. היעד הקולט מבצע היפוך כדי למצוא את הגל המקורי.
- רדיו FM: frequency modulation – אפנון בו האמפליטודה קבועה והפאזה משתנה (יותר נכון לקרוא לזה PM): $A(t)\cos[2\pi f_{RF} + \phi(t)]$. כיוון שהתדר הוא נגזרת של הפאזה, בשידור PM וקליטת FM מבצעים אינטגרל על מה שנקלט.

חזרה לטרנספורם הילברט:

טרנספורם הילברט מבצע: $y(t) = \hat{H}x(t) = A(t)\sin\phi(t)$. מציאת $A(t), \phi(t)$ של הילברט מתוך $x(t)$:

- $A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ (כי $x^2(t) + y^2(t) = A^2(t)\cos\phi(t) + A^2(t)\sin\phi(t) = A^2(t)$)
- $\phi(t) = \tan_4^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$ (הסימן מתוקן לפי סימני $(x(t), y(t))$).

עקרון אי הודאות:

ניתן למדוד תדר סינוס ע"י חישוב מספר מחזורים חלקי הזמן בו מתקיימים. ככל שרואים סינוס טהור לאורך יותר זמן, כך ניתן יותר לדייק בתדר שלו. נסמן $\Delta\omega$ כאי דיוק בתדר ו-Δt זמן ההסתכלות על הסיגנל. עקרון אי הודאות: $\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi$.

DTF ו-iDFT:

עבור $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ נסתכל על $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}$ כאשר $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. W_N הוא שורש היחידה מדרגה N כי $W_N^N = 1$. לפי כללי דה-מואבר, בהכפלת שני מרוכבים מכפילים את האמפליטודה ומחברים את הפאזה; במקרה זה רק מחברים פאזות ולכן חיבור N פעמים יתן: $N\frac{2\pi}{N} = 2\pi$. אז:

- DFT: $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}$
- iDFT: $x_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk}$

<u>מערכות לעיבוד אותות</u>:

מערכות שהקלטים והפלטים שלה הם סיגנלים. לרוב נסתכל על מערכות עם פלט וקלט יחיד. דוגמא: מערכת A/D.

מערכות עיבוד אותות עם קלט ופלט יחיד:

<u>מערכת לינארית</u>: מערכת המקיימת:

- אם עבור $x_1(t)$ מתקבל $y_1(t)$ ועבור $x_2(t)$ מתקבל $y_2(t)$ אז עבור $x_1(t)+x_2(t)$ מתקבל $y_1(t)+y_2(t)$.
- אם עבור $x_1(t)$ מתקבל $y_1(t)$ אז עבור $ax_1(t)$ מתקבל $ay_1(t)$.

מגבר למשל הוא מערכת לינארית, ומערכת המחזירה סיגנל קבוע כלשהו תמיד היא דוגמא למערכת שאינה לינארית. גם המערכת $y=\hat{z}^{-1}x$ או $y=\hat{z}^{-k}x$ הן מערכות לינאריות.

<u>מערכת סיבתית</u>:

מערכת שלא צריכה "כדור בדולח" כדי לדעת לחשב את הערך, כלומר לא תלויה בסיגנלים עתידיים, אלא רק באלו שכבר היו: $y_n=f(x_o,x_1,\dots,x(n-1),x_n)$. למשל, $y=\hat{z}x$ (אופרטור הקידום בזמן) אינה מערכת סיבתית כי $y_n=x_{n+1}$.

<u>מערכת אינווריאנטית כלפי הזמן</u>:

מערכת שעבור כל קלט תמיד מחזירה לו את אותו פלט ללא תלות בזמן (ב-t / n). למשל, $y_n=nx_n$ אינה אינווי' כלפי הזמן.

מסנן (פילטר):

מערכת לינארית ואינוו' כלפי הזמן היא מסנן. משמעות המסנן בתחום התדר היא שתדר שלא הוכנס למסנן לא יכול לצאת ממנו. דוגמאות למערכות שאינן מסננים:

- מערכת לא לינארית כמו $y(t)=x(t)+\varepsilon x^2(t)$ כאשר $x(t)=\sin\omega t$: נקבל בפלט גם x, גם DC וגם $\sin 2\omega$ - שני תדרים נוספים שלא נכנסו.
- מערכת לא אינוו' כלפי הזמן כמו $y(t)=e^{i\Omega t}x(t)$: המערכת מזיזה את הספקטרום ב-Ω, כלומר מתקבלים תדרים אחרים.

<u>ייצוג</u>:

- אנלוגי: $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$
- דיגיטלי: $Y_k=H_k\cdot X_k$

דוגמאות למסננים:

- מסנן low-pass: מעביר רק תדרים נמוכים. למשל, כאשר אנו מדברים אנו נשמעים לעצמינו בעלי קול נמוך יותר מאשר אם אנו שומעים הקלטה של עצמינו, כי הקול עובר לאוזן דרך העצם המשמשת מסנן low-pass.
- מסנן high-pass: מעביר רק תדרים גבוהים. למשל, בהד החוזר במערה נשמעים תדרים גבוהים יותר מנמוכים, המערה היא מסנן high-pass.
- מסנן גוזר: $y=\frac{d}{dt}x$ (נגזרת היא פונ' לינארית ואינוו' כלפי הזמן).

<u>סימון למסנן</u>: $y_n=\sum_{l=0}^{L}a_l x_{n-l}$ - מבנה הסכום הוא קונבולוציה – סכום מכפלות שאינדקס אחד עולה והשני יורד כך שסכום האינדקסים הוא קבוע (לעומת קורלציה, כמו $\sum x_n y_n$).

<u>דוגמאות לקונבולוציות</u>:

נניח כי משודר סיגנל k קבוע אך מתקבל גם רעש: $x_n=k+\nu_n$. נסמן תוחלת סיגנל ע"י $<\cdot>$ וכיוון שאין ל-ν_n רכיב DC מתקיים: $<\nu_n>=0$. מכאן שאם נגדיר $y_n=\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}x_{n-l}$, ומתקיים $<x_n>=<k>+<0>=k+0=k$ אז ניתן לרשום את y_n כך: $y_n=\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}a_l x_{n-l}$ וזו קונבולוציה (כאן $a_l\equiv\frac{1}{L},\forall l$). מיצוע על הרבה x-ים יקטין את הטעות על k.

קונבולוציה בציר הזמן ומכפלה בציר התדר:

קונבולוציה בציר הזמן $y_n=\sum_l h_l x_{n-l}$ המסומנת $y=h*x$ תהיה מכפלה בציר התדר: $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$, ולהיפך.

מסננים:

<u>מסנן MA – moving average</u>:

יתכן שבסילוק רעש נפגע בסיגנל עצמו, ולכן ניתן למצע על מקטעים קטנים רציפים ע"י חלון נע. פתרון MA טוב כאשר השינוי בסיגנל הוא איטי, אך אם השינוי מהיר, נשתמש ב-MA משוקלל: ככל שהנקודה תהיה קרובה יותר למרכז החלון, כך המשקל שלה יהיה גדול יותר. ב- MA משוקלל ה-a_l כבר לא יהיו קבועים. מסנן MA הוא מסנן התלוי במספר **סופי** של x_i קודמים: $y_n=f(x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-L})$.

<u>מסנן autoregressive - AR</u>:

מסנן המקיים: $y_n = \alpha x_n + (1-\alpha) y_{n-1}$ (נסמן $\beta = 1-\alpha$). נוסחה זו אינוו' כלפי הזמן כי α, β קבועים, וכמו כן מערכת זו לינארית.

<u>מסנן ARMA – בעל רכיבי MA ו-AR</u>:

מערכת מהצורה: $y_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-L}; y_{n-1}, \dots, y_{n-M})$. ניתן לאמר כי החלק התלוי ב- y_i הוא חלק ה-AR (החלק הרקורסיבי), והחלק השני הוא חלק ה-MA. ובאופן כללי: $y_n = \underbrace{\sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}}_{MA\ part} + \underbrace{\sum_{m=1}^{M-1} b_m y_{n-m}}_{AR\ part}$.

- אם כל ה-b-ים הם 0, המסנן הוא מסנן MA.
- אם כל ה-a-ים פרט לראשון הם 0, המסנן הוא מסנן AR.

כל אחד מהחלקים בנפרד הוא קונבולוציה, וניתן לכתוב באופן סימטרי: $\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l x_{n-l} = \sum_{m=1}^{M-1} \beta_m y_{n-m}$ (ע"י העברת אגפים והכנסת y_n לסכום על רכיבי ה-y_i; אם $L \neq M$ ניתן לרפד את הסכום הקטן יותר ע"י רכיבים עם מקדם 0).

<u>ייצוג ARMA ע"י אופרטור ההפרש הסופי הראשון</u>:

$\hat{\Delta} = 1 - \hat{z}^{-1}$ הוא אופרטור ההפרש הסופי, כאשר $y = \hat{\Delta} x$ מקיים $y_n = x_n - x_{n-1}$. לאופרטור זה תכונות כמו נגזרת:

- אם x סיגנל קבוע אז $\hat{\Delta} x = 0$.
- $\hat{\Delta} a x = a \hat{\Delta} x$.

ניתן להמשיך ולהסתכל על סדרת ההפרשים של סדרת ההפרשים, שהוא אופרטור ההפרש הסופי השני – $\hat{\Delta}^2$, בעל תכונות דומות לנגזרת שניה וכו'.

כל ייצוג סימטרי למסנן ה-ARMA ניתן להמיר לייצוג הפרשים: $\sum A_l \hat{\Delta}^L x = \sum B_m \hat{\Delta}^m y$.

גילוי מערכות:

בהינתן מערכת לא ידועה, דלט ופלט של אותה מערכת, נרצה לגלות מהי המערכת הזו. בזיהוי מערכות יש שני מצבים:

- המקרה הקל: ניתן להסתכל על אילו זוגות של קלט-פלט שנרצה.
- המקרה הקשה: נתונים לנו זוגות של קלט-פלט שלא אנחנו קבענו אותם.

כדי לזהות מערכת יש לדרוש שתהיה מסנן, כלומר לינארית ואינו' כלפי הזמן.

פתרונות אפשריים לבעיה הקלה:

אסטרטגיה ראשונה: הכנסת מתקף – הלם:

הכנסת קלט שהוא 0 בכל זמן פרט לנקודת זמן בודדת (נניח $n = 0$), שם הוא 1. תגובת המערכת היא impulse response – IR. יציאות אפשריות:

- אם המערכת היא ללא זיכרון, אז גם הפלט יהיה 0 בכל הזמנים פרט ל-$n = 0$.
- באופן כללי, אם המערכת סיבתית, נקבל תגובה החל מזמן $n = 0$.

<u>סוגים של מסננים לפי תגובה</u>:

- finite IR – FIR: מסנן שזמן סופי לאחר התגובה להלם, חוזרת תגובתו להיות 0.
- infinite IR – IIR: מסנן שלאחר התגובה להלם לעולם לא חוזר להיות 0.

<u>טענה</u>: IR מספיק לזיהוי המערכת. הסיבה לכך היא שהמערכת אינוו' כלפי הזמן, ולכן ידיעת התגובה עבור זמן $n = 0$ מספיקה כדי לדעת את התגובה בכל זמן אחר (הזזה). כמו כן המערכת לינארית, ובסיס ה- SUI פורש את מרחב הסיגנלים (הדיגיטליים), ולכן כל אות ניתנת לייצוג כצירוף לינארי של SUI וכך ניתן לזהות את תגובת המערכת לכל דיגנל.

ל-FIR נזדקק למספר סופי של מקדמים, ל-IIR באופן עקרוני מספר אינסופי של מקדמים (יטופל בהמשך).

אסטרטגיה שניה: הכנסת סינוס:

כיוון שתדר סינוס יישמר בכל מסנן (יתכן מוגבר או מונחת, אך אותו תדר), ניתן לבדוק frequency response - FR:

- לוקחים כל תדר ובונים טבלת אמפליטודה ופאזה לפלט על אותו סינוס (A, ϕ). מה שהתקבל לכל תדר הוא אותו תדר רק מונחת/מוגבר ומוזז.
- לפי משפט פורייה כל סיגנל ניתן לכתוב כסכום משוקלל של סינוסים וקוסינוסים (פורשים את מרחב הסיגנלים) ולכן אם נפרק כל סיגנל לסכום נדע את הפלט על כל אחד מהגורמים בו. מלינאריות המסנן נדע מה קורה לסיגנל הכולל.

מכאן שתגובה לתדר מכילה גם כן את כל האינפורמציה הנדרשת כדי לאפיין את המסנן.

<u>הקשר בין IR ל-FR</u>: התגובה להלם המסומנת h_n בציר הזמן היא DFT של התגובה לתדר H_k בציר התדר (עבור אותות דיגיטליים), ולהיפך.

לכל מסנן יש ייצוג מהצורה: $y_n = \sum_l h_l x_{n-l}$ כאשר ה-h_i הם ה-IR. כיוון שקונבולוציה בציר הזמן היא מכפלה בציר התדר אז: $Y_k = H_k \cdot X_k$.

פתרונות אפשריים לבעיה הקשה:

<u>אם המערכת היא מסנן MA כשהקלט הוא כל הזמן 0 עד זמן מסוים</u>: הצורה הכללית היא $y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}$, ונגדיר את הזמן הראשון בו הקלט אינו 0 כ-$n = 0$, ובנקודה זו רואים את x_0, y_0. אנו רוצים למצוא את a_i ולכן ניתן לכתוב את הבעיה בצורה וקטורית:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ x_{L-1} & x_{L-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{L-1} \end{bmatrix}$$

המטריצה לעיל היא מטריצה משולשית תחתונה ומטריצה <u>טפליצית</u> (כל האלכסונים בה מכילים את אותו איבר לאורך האלכסון), וכדי למצוא את המקדמים a_i (ולאחר מכן את h_i: $h_i = \begin{cases} a_i, & 0 \le i \le L-1 \\ 0, & o/w \end{cases}$) יש למצוא את המטריצה ההופכית. מטריצה הופכית למט' טפליץ ניתן למצוא ב-$O(n^2)$.

<u>אם המערכת היא מסנן MA כשהקלט אינו 0 עד זמן מסויים</u>:

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_{n-L+1} \\ x_1 & x_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1} \\ x_{n+L-1} & x_{n+L-2} & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{L-1} \end{bmatrix}$$

פתרון באותו אופן; משוואות אלו נקראות Wiener-Hopf.

<u>אם המערכת היא מסנן AR</u>:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+L-1} \end{bmatrix}}_{\bar{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+L-1} \end{bmatrix}}_{\bar{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_n & y_{n-1} & \dots & y_{n-L+1} \\ y_1 & y_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & y_{n-1} \\ y_{n+L-1} & y_{n+L-2} & \dots & y_n \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{Y}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{L-1} \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

וזוהי שוב מטריצה טפליצית, ומציאת $\bar{b}$ ע"י: $\bar{Y} = \bar{X} + \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{b} \Rightarrow \bar{b} = \bar{\bar{Y}}^{-1}(\bar{Y} - \bar{X})$. משוואות אלו נקראות משוואות Yule-Walker.

<u>הערות</u>:

- במשוואות אלו אין התייחסות לרעש בעת הדגימה, ולכן יש צורך במיצוע על כמה דגימות. מיצוע אינו פותר את בעית הרעש לאחר היפוך מטריצה, ולכן את המיצוע יש לעשות לפני פתרון מרכת המשוואות.
- לא לחשב בציר התדר את $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ כיוון ש-$X(\omega) = 0$ במקרים מסויימים.

<u>אם המערכת היא ARMA</u>: אם נחזור על תהליך זה כבר נקבל מטריצה שאינה טפליצית ופתרון הבעיה קשה.

סיכום ביניים:

- מסנני MA הם מסנני FIR.
- מסנני AR או ARMA הם מסנני IIR.

<u>פונקציות יוצרות</u>:

עבור הסדרה s_n, $S(x)$ היא פונקציה יוצרת של הסדרה כאשר $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ - טור טיילור שמקדמיו הם s_n. כך ניתן לקבל נוסחאות מפורשות עבור סדרות המוגדרות רקורסיבית.

<u>טרנספורם ה-Z</u>:

טרנספורם Z מוגדר כך: $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n}$. הוא שונה מפונ' יוצרת בכך שהטור לא מתחיל מ-0 אלא מ-$-\infty$, חזקת z היא שלילית ופונ' זו מעל המרוכבים ולא הממשיים. זהו טרנספורם Z, הלוקח סדרה והופך אותה לפונקציה (כלומר הוא לא באמת טרנספורם). תכונות:

עבור $y = \hat{z}^{-1}s$, חישוב טרנספורם Z: $S(\hat{z}^{-1}s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{n-1} z^{-n} = \underbrace{z^{-1}}_{\text{מספר}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{n-1} z^{-(n-1)} \underbrace{=}_{\text{הזזת אינדקסים}} \hat{z}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n} = \hat{z}^{-1} S(z)$.

כלומר: $zT(\hat{z}^{-1}s) = \hat{z}^{-1} zT(s)$, כאשר zT הוא סימון לטרנספורם Z.

<u>הערה</u>:

טרנספורם Z הוא הכללת טרנספורם פורייה על המרוכבים: אם נסתכל על מעגל היחידה כמישור ה-z, כל z עליו הוא מהצורה $z = e^{i\omega}$. סכום על כל שורשי היחידה: $\sum s_n z^{-n} = \sum s_n z^{-i\omega n}$ - טרנספורם פורייה. מכאן שטרנספורם פורייה הוא מקרה פרטי של טרנספורם Z על מעגל היחידה. טרנספורם Z יכול להיות מוגדר על טבעת כלשהי במישור המרוכב, בעוד פורייה מוגדר רק על מעגל היחידה.

<u>פתרון הבעיה הקשה ע"י טרנספורם Z על תגובה להלם</u>:

נתחיל ממשוואת התגובה להלם: $y_n = \sum_{l=-\infty}^{-\infty} h_l x_{n-l}$, ומכאן נפעיל את טרנספורם Z:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{n-l} z^{-n} = \cdots = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l z^{-l} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = H(z)\cdot X(z)$$

הצבה במעגל היחידה תיתן את טרנספורם פורייה: $Y(\omega) = H(\omega)\cdot X(\omega)$, וכך נאפיין את המסנן. הפעלת טרנספורם Z על הקלט והפלט תמצא לנו את פונקציית התמסורת $H(z)$ המוגדרת: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ומייצגת את המסנן. $H(z)$ היא טרנספורם ה-Z של h_l: $H(\omega) = \sum_l h_l e^{-iwl}$.

<u>פתרון ע"י טרספורם Z על משוואת ההפרשים</u>:

נתחיל ממשוואת ההפרש: $\sum_l \alpha_l x_{n-l} = \sum_m \beta_m y_{n-m}$ ונבצע טרנספורם Z על שני האגפים:

$$\sum_n\sum_l \alpha_l x_{n-l} z^{-n} = \sum_n\sum_m \alpha_m y_{n-m} z^{-n} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \sum_l \alpha_l z^{-l}\cdot\sum_n x_n z^{-n} = \sum_m \beta_m z^{-m}\cdot\sum_n y_n z^{-n}$$

וקיבלנו מכפלות של טרנספורם Z: $A(z)\cdot X(z) = B(z)\cdot Y(z)$ ומכאן $Y(z) = \frac{A(z)}{B(z)}\cdot X(z)$, ולפי הפתרון הקודם: $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$. כיוון שב- A, B מספר סופי של מקדמים קיבלנו פונ' רציונאלית. כיוון שתמיד קיים פירוק פולי' מעל המרוכבים, נקבל: $H(z) = \frac{\Pi_l (z-\lambda_l)}{\Pi_m (z-\pi_m)}$ כאשר λ_i הם **אפסים** ו-π_i הם **קטבים**. ומכאן שהאפסים והקטבים, הקובעים פונ' ראציונלית באופן חד ערכי, בם ייצוג נוסף למסנן.

סיכום דרכי ייצוג למסנן:

- המקדמים a_l, b_m ב- $y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l} + \sum_{m=1}^{M-1} b_m y_{n-m}$ או α_l, β_m ב- $\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l x_{n-l} = \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m y_{n-m}$.
- IR – תגובה להלם $\{h_l\}$: $y_n = \sum_{l=0}^{\infty} h_l x_{n-l}$ (עבור l-ים שליליים $h_l = 0$).
- FR – תגובה לתדר $\{H_k\}$: $Y_k = H_k \cdot X_k$.
- פונקציית התמסורת $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ (מוגדרת ע"י טרנספורם פורייה על תגובה להלם).
- אפסים וקטבים מהם מוצאים את $H(z)$ באופן חד ערכי.

כאשר המסנן הוא MA יש אפסים אך אין קטבים, וכאשר המסנן הוא AR יש קטבים אך אין אפסים. לכן נקבל סיווג שלם למסננים:

FIR	*MA*	*All zero*
IIR	*AR*	*All pole*
	ARMA	*Pole-zero*

<u>משמעות האפסים והקטבים</u>:

פונקצית התמסורת תהיה ממשית אם שורשיה יהיו ממשיים או זוגות של מרוכבים צמודים.

- <u>משמעות אפס על מעגל היחידה</u>: התדר בנקודה בה יהיה 0 מסונן. למשל, 0 ב-$0°$ (ביחס לציר ה-x) משמעו סינון סיגנל ה-DC.
- <u>משמעות קוטב על מעגל היחידה</u>: הגדלת עוצמת התדר גדלה באותה נקודה.

ניתן לתאר זאת כרכבת הנעה במסלול שהוא מעגל היחידה. נקודות בהן יש אפס יוצרות עמקהמתחיל מאותה נקודה ומתרחב לכיוון חוץ המעגל. ככל שהאפס יותר קרוב לראשית כך ה"עמק" יהי יותר רחב על המסלול, וככל שהוא יותר קרוב למעגל היחידה, כך הוא יהיה יותר ממוקד ומקומי. קטבים יהיו כמו הרים עם אותו מאפיין השפעה.

<u>תורת הגרפים ב-DSP</u>:

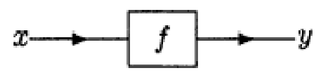
גרפים בתורת הגרפים הם גרפים מכוונים המורכבים מ:

- נקודות המציינות סיגנלים.
- קווים המציינים מערכות לעיבוד אותות.

דוגמאות:

סיגנל הזהות:

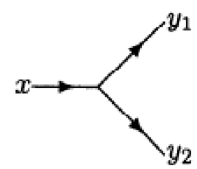
הפעלת f על הקלט: $y = f(x)$:



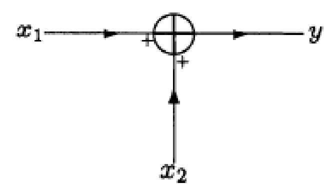
הגברה, או: $y = Gx$:

הסימן G צריך להיות ליד סימן החץ כדי לציין מגבר.

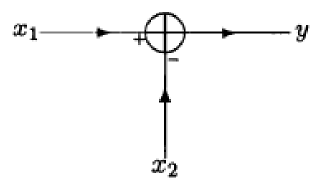
$x = y_1 = y_2$:



חיבור: $y = x_1 + x_2$:



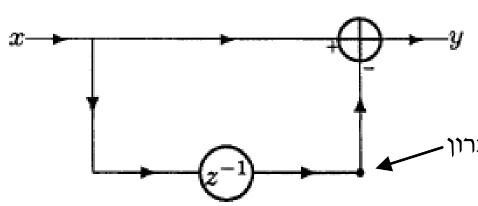
חיסור: $y = x_1 - x_2$:



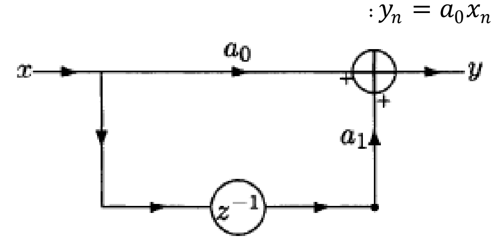
תהליך עם זיכרון: $y = \hat{z}^{-1}x$:

הנקודה ליד ה-y מציינת שזהו תהליך עם זיכרון. כדי לממש $\hat{z}^{-1}$ למשל זקוקים לזיכרון.

ההפרש הסופי הראשון: $y = \widehat{\Delta}x = x - \hat{z}^{-1}x$:

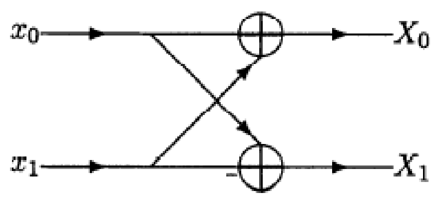


$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1}$:



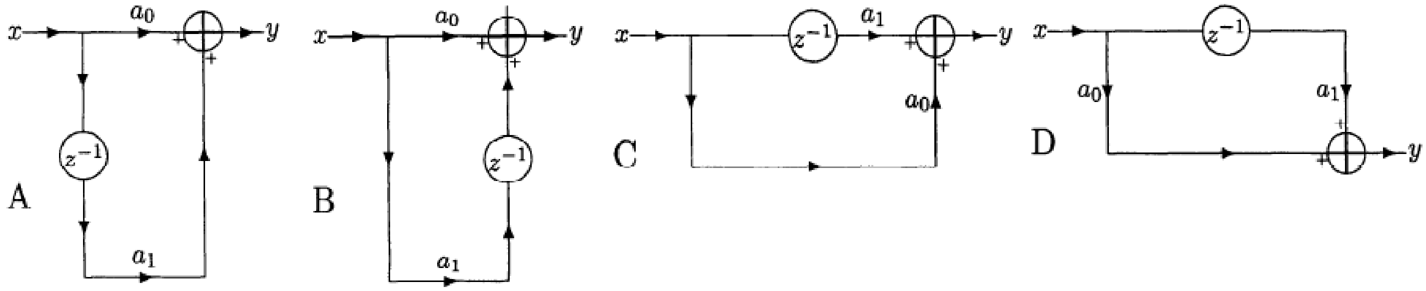
זהו מסנן MA פשוט בעל זיכרון אחד

DFT עבור $N = 2$:



כאשר $X_0 = x_0 + x_1, X_1 = x_0 - x_1$

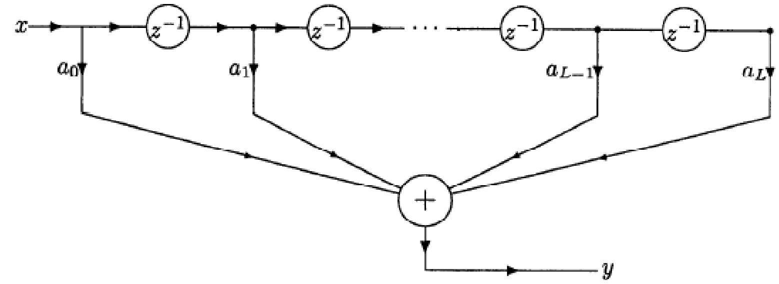
להלן 4 דרכים מקובלות, ביניהן שינויים טופולוגיים אך לא רק. שינויים נוספים נעשו כמו שינוי סדר הכפלה או הפעלת $\hat{z}^{-1}$, אך המערכת לא משתנה כיוון שמדובר במסנן שהוא מערכת לינארית ואינוו' כלפי הזמן.



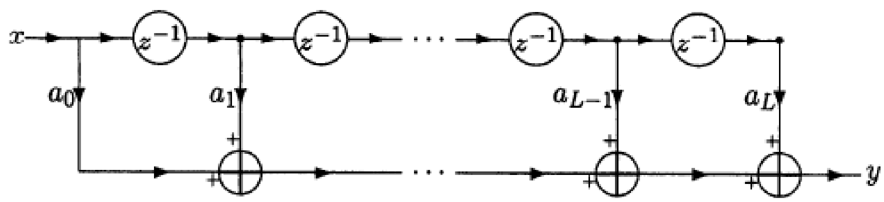
<u>מסננים מתחלפים</u>: אם שתי מערכות הן מסננים, הן מתחלפות, כלומר, אם f, g מסננים אז $f(g(x)) = g(f(x))$.

מימוש גרף MA:

להלן מימוש ל-$y_n = \sum_l a_l x_{n-l}$:

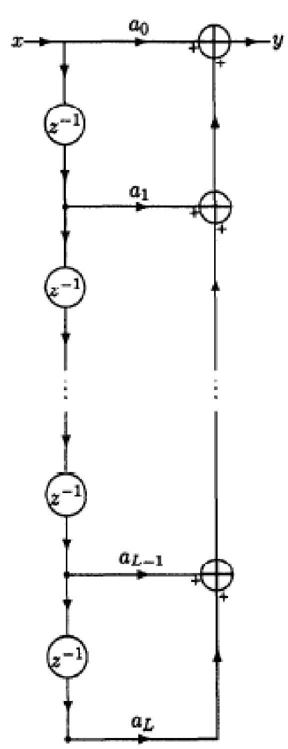


סדרת ה-$\hat{z}^{-1}$ למעלה נקראת top-delayed line. מבנה הנתונים המוצג בגרף הוא FIFO – תור בו הראשון שנכנס הוא הראשון שיזרק. כיוון שחיבור עם יותר משתי כניסות לא מוגדר, נממש באופן אחר:



ניתן לראות שמערכת זו מורכבת מרכיבי D חוזרים – <u>איטרציות</u> (לא רקורסיות, כיוון שזה MA) על D. שיטה זו היא MAC – multiply and accumulate – הכפלה וצבירה. פעולת ה-MAC הינה פעולה חשובה ב-DSP, ומעבדים המבצעים זאת ביעילות נקראים מעבדי DSP.

כיוון שהגרף מכיל גם את המבנה (FIFO) וגם את האלגוריתם (איטרציות על רכיב D), הרי שהוא מכיל את כל האינפו' הנדרשת לבניית המערכת באופן חד ערכי. מימוש נוסף:



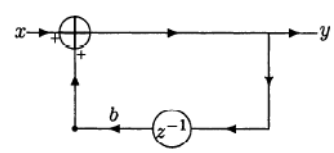
כאן המימוש הוא שונה בכך שהחיבור בסדר הפוך מאשר קודם. אין משמעות מתמטית, אך תתכן משמעות למימוש.

במקרה זה הרוטינה הבסיסית המרכיבה את המערכת היא A, והמבנה גם כאן הוא FIFO.

הערה חשובה:

בגרף למסנן MA <u>לעולם לא יהיו מעגלים (של חצים)</u>. מעגלים מעידים שהמסנן הינו AR.

מימוש גרף AR:



כאן משוואת המערכת היא: $y_n = x_n + b_1 y_{n-1}$

המעגל בגרף נקרא <u>משוב</u>.