DSP שיעור 4#

תזכורת לפעם שעברה:

למדנו על מערכות לעיבוד אות: מערכת עם אות/אותות בכניסה ואות ביציאה (לפחות אחת). נתמקד במערכות אותות ספרתיים עם אות אחת בכניסה ואות אחת ביציאה. המערכת מקבל קלט x ומוציאה y. סימון מדוייק יותר: $y_n = f(x_n)$

- מערכת תהיה סיבתית אם היא לא תלויה בכל הסיגנלים העתידיים אלא רק מה שהיה: $y_n = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$
- כמו כן מערכת היא אינווריאנטית לגבי הזמן אם היא לא תלויה ב-n.
- לינארית – ברור.
- מערכות שהם גם לינאריות וגם אינווריאנטיות לגבי הזמן קרויות מסנן.

דוגמאות למסננים:

פעם שעברה דיברנו באופן כללי על מסננים, כיום נדבר על מסננים מעל סיגנלים ספרתיים ונראה תכונות מעניינות שלהם, ונקטלג סוגי מערכות בהתאם.

דוגמא 1:

אדם עומד במערה וצועק – מהו הסיגנל שאותו אדם שומע כפונקציה של מה שמשמיע?

הערה: כשאנו שומעים את עצמנו בדיבור לעומת הקלטה של עצמנו, הצליל נשמע שונה. זאת מכיוון שכאשר אני שומעים את עצמנו אנו שומעים את הקול העובר דרך העצם, המשמשת כמסנן *low-pass*, ולכן שומעים יותר תדרים נמוכים. כאשר שומעים הקלטה שומעים תדרים גבוהים יותר.

נניח בדוגמא זו האות דיגיטלי, אז: $y_n = x_n$. אבל, יש גם הד, כלומר משהו שצעקתי חזר אלי אחרי זמן מסויים – הזמן שלקח לקול להגיע לקיר ולחזור אלי; כמו כן ההד שחזר חוזר חלש יותר כי הקול התפזר במערה, ולכן האנרגיה ירדה. עצם ההתפשטות במרחב גורמת לירידת חוזק הקול, כמו גם הפגיעה בקיר שסופג חלק מהקול. כלומר: $y_n = x_n + a \cdot x_{n-m}$ כאשר $n-m$ זה מה שאמרתי לפני m רגעים (דגימות הזמן הדיסקרטי); $0 \le a < 1$ (0 אם אני לא שומע הד; בטוח לא גדול מ-1). אבל, ההד חוזר מכל מיני מקומות בכל מיני זמנים, ולכן:

$$y_n = x_n + a_1 \cdot x_{n-1} + a_2 \cdot x_{n-2} + \cdots + a_L \cdot x_{n-L}$$

כמובן שאם בזמן מסוים לא היה הד, ה-a שלו הוא 0. כאן L מייצג את המרחק הגדול ביותר שעובר הקול במערה, פוגע בקיר וחוזר אלי.

דוגמא זו היא מערכת סיבתית וגם אינווריאנטית כלפי הזמן – כל ה-a קבועים בזמן ולא משתנים. אחרון חביב: מערכת זו לינארית. סה"כ, המערה עובדת בתור מסנן. זה אומר שיש תדרים מסויימים שהוא מגביר, יש תדרים מסויימים שהוא מנחית, אך לעולם לא יחזור משהו אחר מהקלט.

אם צועקים במערה, תדרים גבוהים יחזרו חזק יותר מנמוכים, וזאת כיוון שהמערה מהווה מסנן לתדרים נמוכים. כאשר למשל תדר סינוס יוצא לקיר מהפה שלי וחוזר באותה פאזה, אז הצליל שמתקבל הוא הכפלה של האות – צליל חזר. אם החזרה היא באנטי פאזה – הצליל נחלש (מתבטל).

שרטוט 1

דוגמא 2:

בקבוק מלא מים באופן חלקי, שנושפים לתוכו אוויר. הנשיפה חסרת צליל, היא למעשה מלא תדרים, ואחד מהם חוזר חזק, אחרים לא.

חליל למשל, כאשר נושפים לתוכו, חלק מהסינוסים יוצאים מחורי החליל הפתוחים בתדר מסויים.

נפשיט את הסימון: $y_n = \sum_{l=0}^{L} a_l \cdot x_{n-l}$.

מערכת זו היא מסנן כי היא לינארית וסיבתית. מבנה זה הוא קונבולוציה – *convolution*. מהי קונבולוציה?

סכום של מכפלות עם התכונה שאם מסתכלים על האינדקסים, אינדקס אחד עולה והאינקס השני יורד. העליה והירידה היא כזו שסכום האינדקסים הוא קבוע. אין להתבלבל עם $\sum x_n y_n$, שזו קורלציה (ולא מקיימת את תכונות הקונבולוציה).

דוגמא 3:

נתון k קבוע, ורוצים להעביר אותו ע"י שידור באמצעות סיגנל DC קבוע k. אבל, הסיגנל לא מועבר באופן ישיר אלא מטייל בעולם, ולכן הוא מתקבל בצד השני בתוספת רעש: $x_n = k + \nu_n$ כאשר ν_n הוא סיגנל רעש. כיצד ניתן למצוא את ה-k?

הרעש ν_n הוא ללא DC, נניח רעש לבן – יש לו את כל התדרים פרט לתדר 0, כלומר הוא מעל הציר ומתחת לציר בערך אותו דבר, כך שהתוחלת/ממוצע שלו הוא 0; סימון: $< \nu_n > = 0$. הדבר ההגיוני לעשות הוא להסתכל על xים רבים ולבדוק עליהם ממוצע: $k \cong \frac{\sum_{i=0}^{100} x_i}{100}$ כלומר: $y_n = \frac{x_n + \cdots + x_{n-(L-1)}}{L}$.

ואז יתקיים: $< x_n > = < k > + < \nu_n > = < k > + 0 = k$ - ולכן המיצוע של הרבה xים נותן קירוב למיצוע. כיוון שלא ניתן לקחת ∞ איקסים, תהיה לנו טעות אך קטנה עבור מספיק איקסים.

$y_n = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{L-1} x_{n-l} = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}\,,\, a_l \equiv \frac{1}{L}, \forall L$ *- convolution*

<u>דוגמא 4</u>:

שרטוט 2

בדוגמא בשרטוט, אם נמצע על הרבה זמן לא נעלים רק את הרעש אלא גם הסיגנל ישתנה ויושפע. במקרה זה ניתן למצע על זמן קצר, אך כאשר ממצעים על מעט זמן הרעש לא מתמצע טוב. אבל בהיעדר אפשרות אחרת נבצע מיצוע על מקטעים קצרים, ונקבל קירוב ל-x. בגלל הקפיצות קיבלנו פחות דגימות מאשר דגימות בקלט, כלומר קירוב גס. במקום לעשות זאת כך, ניתן לעשות "חלון זז" – כל פעם מזיזים את את החלון דגימה אחת קדימה – **שרטוט 3**;

עשינו כאן מיצוע נע – *<u>moving average = ma</u>*. ומתקבל: $y_n = \frac{1}{L+1}\sum_{l=-\left(\frac{L}{2}\right)}^{+\frac{L}{2}} x_{n-l} = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}$ - וזו גם <u>קונבולוציה</u> (טרוויאלית, אך קונבולוציה).

<u>דוגמא 5</u>:

כעת הסיגנל x זז יותר מהר, והוא מלוכלך בהרבה רעש, **שרטוט 4**. הפעם נשתמש ב<u>משקלות</u> – גם MA אך לא כל ה-a_l יהיו $\frac{1}{L}$, אלא lים שיהיו לקראת הקצוות 0 ולקראת האמצע גבוהים, כך שהסכום שלהם הוא 1 (O בשרטוט). במיצוע כזה עדיין ממצעים את הרעש יחסית בסדר (פחות מהעבר אבל בסדר), ומתקבל שוב ביטוי מהסוג: $y_n = \frac{1}{L+1}\sum_{l=-\left(\frac{L}{2}\right)}^{+\frac{L}{2}} x_{n-l} = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}$ רק שה-a הם לא קבועים אלא משתנים בזמן.

נסתכל בציר התדר: **שרטוט 5**

המסנן שעשינו בדוגמא לעיל הוא מסנן *low-pass*. היכן שיש חפיפה בין הרעש לסיגנל, מסנן לא יכול לעשות כלום;

מסנן ה-*MA* מבצע קונבולוציה.

<u>אז מה זה קונבולוציה?</u>

בחלק הזה המרצה הציג דוגמא להכפלת שני מספרים או שני פולינומים, למשל $a_0 + a_1x + a_2x^2$ כפול $b_0 + b_1x + b_2x^2$:

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2$$

וניתן לראות את הקונבולוציה באינדקסים של המקדמים.

בגלל הקשר בין קונבולוציה למכפלה נהוג לסמן קונבולוציה כך: $x * y = z$ - זו פעולה הציר הזמן. בציר התדר: $X \cdot Y = Z$. והפוך, אם יש <u>קונבולוציה</u> בציר התדר, יש <u>מכפלה</u> בציר הזמן. מכאן, אם נתון אוסף מקדמים של קונבולוציה: $y_n = \sum_l h_l x_{n-l}$ אז $y = h * x$ ואז בציר התדר: $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$. כל זה יוכח בהמשך.

מה עושה קונבולוציה בציר התדר:

ניקח $y_n = \frac{x_{n-1}+x_n+x_{n+1}}{3}$. רוצים למצוא באופן מפורש כיצד זה נראה בציר התדר. מכדי לעשות זאת צריך לדעת ש-$X(\omega)$ הוא עם המון תדרים בפנים, כל מיני סינוסים. אבל המערכת לינארית, ולכן ניתן להכניס כל סינוס בנפרד ולחבר בסוף. לכן מספיק לראות מה קורה עם סיגנל עם סינוס אחד בתדר אחד, ואז נוכל להרכיב כל מערכת שנרצה.

ניקח אם כן את המערכת הנ"ל ונכניס סיגנל עם תדר בודד, ואותו סיגנל שנכניס הוא $e^{i\omega n}$ ונסתכל רק על החלק הממשי שלו (cos). אז אם $x_n = e^{i\omega n}$ אז: $y_n = \frac{1}{3}\left[e^{i\omega(n-1)} + e^{i\omega n} + e^{i\omega(n+1)}\right] = \frac{1}{3}\left[e^{i\omega n}e^{-i\omega} + e^{i\omega n} + e^{i\omega n}e^{i\omega}\right] = \frac{1}{3}\left[1 + e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}\right]e^{i\omega n}$ כאשר הכופל האחרון הוא x_n וכל המקדם שלו הוא $H(\omega) = \frac{1}{3}\left[1 + e^{i\omega n} + e^{-i\omega n}\right] = \frac{1}{3}\left[1 + 2\cos\omega\right]$. נצייר אותו ב **שרטוט 6**. זהו מסנן *low-pass*, שלא דומה כל כך לקודמים שראינו – הוא יורד ובסוף יש לו זנב.

מה שנעשה כדי לשפר את הזנב:

$$y_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$$

במקרה זה נקבל:

$$= \frac{1}{4}e^{i\omega n}\cdot e^{-i\omega} + \frac{1}{2}e^{i\omega n} + \frac{1}{4}e^{i\omega}e^{i\omega n} = \left[\frac{1}{4}e^{-i\omega} + \frac{1}{4}e^{i\omega} + \frac{1}{2}\right]e^{i\omega n} = \frac{1}{2}(1 + \cos\omega)e^{i\omega n}$$

במקרה זה נקבל סיגנל עצמי – כלומר המערכת מכפילה את הסיגנל המקורי בקבוע. **שרטוט 7**.

אם נכניס DC נקבל 1 בפלט – לא ישתנה. $|H(\omega)|$ היא התגובה לתדר, כי זה אומר כיצד המערכת מגיבה לכל תדר ותדר בקלט.

תרגיל: $y_n = x_n - x_{n-1}$

מה קורה ל-DC? מתאפס – כלומר בהתחלת הגרף מתאפס; מה קורה ל-$Nyquist$? נקבל 1 – כלומר נקבל מסנן *high-pass*.

מסנן AR:

ראינו דרך לחישוב ממוצע ע״י מסנן MA; כעת נראה דרך נוספת:

n	x_n	y_n
0	x_0	x_0
1	x_1	$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}x_1$
2	x_2	$\frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}x_2$
3	x_3	$\frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{4} = \frac{3}{4}y_2 + \frac{1}{4}x_3$

ובמקרה הכללי: $y_m = \frac{m}{m+1}y_{m-1} + \frac{1}{m+1}x_m \coloneqq \alpha \cdot x_m + \beta \cdot y_{m-1},\ where\ \alpha + \beta = 1$.

מתקבל סוג של מיצוע על מספר איברים אחרונים התלוי ב- β. הנוסחה הזו: <u>אינווריאנטית</u> כלפי הזמן כי α, β קבועים. קל להראות גם שזה <u>לינארי</u> – כלומר זה מסנן. שמו AR הוא מתוך *Autoregressive*.

אם מערכת זו היא מסנן היא צריכה להיות אינווריאנטית כלפי הזמן ולינארית

$$y_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-L}; y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-M}) =$$

$$= \underbrace{\sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}}_{MA\ part} + \underbrace{\sum_{m=1}^{M-1} b_m y_{n-m}}_{AR\ part}$$

מסנן $ARMA$:

אם אין חלק AR, כלומר אין חלק רקורסיבי וכל ה-b הם 0, אז יש מסנן MA. אם כל ה-a הם 0 חוץ מהראשון אז המסנן הוא מסנן AR. אם שניהם לא 0 אז זהו מסנן $\boldsymbol{ARMA}$ – המסנן הכללי ביותר. כל אחד מחלקי הנוסחה בנפרד הוא קונבולוציה – קונ׳ אחת על הקלטים הקודמים x ואחת על הפלטים הקודמים y.

צורה סימטרית ל-$ARMA$:

$$\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l x_{n-l} = \sum_{m=1}^{M-1} \beta_m y_{n-m}$$

כאשר $\alpha_l = a_l$ לכל l; $\beta_l =$ המניפולציה שצריך לעשות כדי שזה יהיה נכון. אם $M \neq L$ פשוט מוסיפים כמה אפסים לאחד האגפים.

דרך נוספת לכתיבה: <u>משוואות הפרש</u>:

נגדיר $\hat{\Delta} = 1 - \hat{z}^{-1}$; $y = \hat{\Delta}x \Rightarrow y_n = x_n - x_{n-1}$. כעת, הסדרה y_n היא סיגנל ההפרשים הראשונים הסופיים.

x: $x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3,\ x_4 \dots$

y: $x_1 - x_0 \quad x_2 - x_1 \quad x_3 - x_2 \dots.$

יש גם הפרש סופי שני שהוא $\hat{\Delta}^2$ והוא ההפרש הראשון של ההפרש הראשון:

$$\hat{\Delta}^2: [x_2 - x_1 - (x_1 - x_0)], [x_3 - x_2 - (x_2 - x_1)], \dots$$

כאשר $\hat{\Delta}$ דומה לנגזרת, $\hat{\Delta}^2$ דומה לנגזרת השניה וכן הלאה. ייצוג באמצעות משוואות הפרש:

$$\sum A_l \hat{\Delta}^l x = \sum A_m \hat{\Delta}^m x$$

כל שלושת הייצוגים הנ״ל של$ARMA$ הם כולם אותו דבר.

ניקח את מסנן ה-AR ונראה מה קורה בציר התדר. רוצים למצוא את $H(\omega)$ עבור מסנן AR.

תרגיל:

$$y_n = (1-\beta)x_n + \beta y_{n-1}$$

זהו AR כי אין לו xים קודמים אבל יש לו yים קודמים. נסמן $x_n = e^{i\omega n}$. מתקיים:

$$y_n = (1-\beta)x_n + \beta[(1-\beta)x_{n-1} + \beta y_{n-2}] = (1-\beta)x_n + \beta(1-\beta)x_{n-1} + \beta^2[(1-\beta)x_{n-2} + \beta y_{n-3}] =$$
$$= (1-\beta)x_n + \beta(1-\beta)x_{n-1} + \beta^2(1-\beta)x_{n-2} + \beta^3 y_{n-3} = \cdots$$

וזה מתכנס לכדי משהו שהוא פונקציה של xים קודמים – אז למה זה לא MA? כי זה לא מספר <u>סופי</u> של xים קודמים, וזו דרישה ל-MA.

כעת נציב את $x_n = e^{i\omega n}$:

$$y_n = (1-\beta)e^{i\omega n} + \beta(1-\beta)e^{-i\omega}e^{i\omega n} + \beta^2(1-\beta)e^{-2i\omega}e^{i\omega n} + \cdots = (1-\beta)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{-i\omega})^k \cdot e^{i\omega n} = (1-\beta)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{-i\omega})^k \cdot x_n$$

$$\Rightarrow H(\omega) = (1-\beta)\cdot\frac{1}{1-\beta e^{-i\omega}}$$

כעת נסתכל על הערך המוחלט של $H(\omega)$: **שרטוט 8**

מתקבלים הרבה מסנני $low\text{-}pass$. אם $\beta = 0$ נקבל $y_n = x_n$ כלומר אין סינון כלל – כל התדרים עוברים. אם $\beta = 1$ אז y הוא קבוע. לכן הגלים הגדולים בשרטוט הם ה-β הקטנות והגלים הקטנים הם β גדולות.