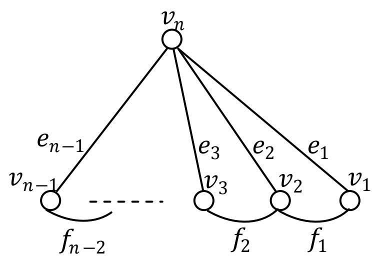
סיבוכיות / תרגיל בית 6#

אריאל סטולרמן

(1)

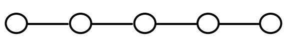
נסתכל על הקלט הבא המהווה *wc* עבור בעית ה-*10TSP*: גרף מלא בו עץ פורש מינימלי הוא מהצורה:



עבור קלט זה יעשה שימוש מקסימלי בקשתות בגרף הקלט שאינן חלק מה- *MST*, וכך הגדלה מירבית של משקל המסלול לפי אלגוריתם ה- *2-approximation*. קשתות הגרף המקוריות יסומנו e_i וקשתות הגרף הנוספות f_i. נניח והמסלול מתחיל על העץ הנ״ל מקודקוד v_n על e_1. כדי להתקדם נהיה חייבים לעבור על קשתות f_i בלבד, שכן כל דרך אחרת אינה חוקית. נזכור כי מתקיים $w(MST) \le w\big(OPT(TSP)\big)$ ונבחן את אורך המסלול שהתקבל לפי אלגו׳ *2-approximation*:

$$
\begin{aligned}
&w(e_1)\\
&+w(f_1) \le w(e_1) + 10 \cdot w(e_2)\\
&+w(f_2) \le w(e_2) + 10 \cdot w(e_3)\\
&\dots\\
&+w(f_{n-2}) \le w(e_{n-2}) + 10 \cdot w(e_{n-1})\\
&= w(e_1) + \sum_{i=1}^{n-2} w(f_i) \le 2 \cdot w(e_1) + 11 \cdot \sum_{i=2}^{n-2} w(e_i) + 10 \cdot w(e_{n-1}) \le 11 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} w(e_i) = 11 \cdot w(TSP) \le 11 \cdot w\big(OPT(TSP)\big)
\end{aligned}
$$

ומכאן שאלגו׳ *2-approximation* תחת תנאי השאלה מספק 11-קירוב לבעית *10TSP*.

הפתרון הנ״ל הוא עבור גרף לא מכוון. בדקתי את האלגוריתם גם על מקרה בו ה-*MST* הוא מהצורה: 

וגם עבורו קיבלתי פקטור 11, אך לא ידועה לי דרך להוכיח שזהו אכן מקרה *worst-case*.

(2)

בהרצאה ראינו רדוקציה (פשוטה) מבעית *VC* לבעית *Set-Cover*: כל קשת הופכים לאלמנט ב-U וכל קודקוד הופכים לקבוצה ב-F כך שלכל קודקוד v הקבוצה המתאימה לו תכיל את כל האלמנטים המייצגים את הקשתות $(v,x) \in E(G)$. מכאן שקירוב C לבעית *Set-Cover* הוא גם קירוב C לבעית *VC*, פשוט ממירים את הקבוצות שנבחרו מתוך F חזרה לקודקודים אותם מייצגים. בהרצאה ראינו כמו כן שהקירוב הטוב ביותר לאלגו׳ החמדן לבעית *Set-Cover* הוא $\ln(max\{|S|\,|\, S \in F\})$, ובהמרה לפתרון ל בעית ה-*VC* קירוב זה הוא $\ln(\max\{d(u) \,|\, u \in V(G)\})$. עבור קלט בו ישנו קודקוד אחד המחובר לכל קודקודי הגרף ובגרף אין עוד קשתות מלבד אלו, הפתרון האופטימלי הוא 1 בעוד הקירוב הטוב ביותר שיתקבל הוא $\ln(|V|-1)$, הגדול מ-2 עבור קלטים מסויימים. לפיכך האלגו׳ החמדן של בעית *VC* אינו מספק 2-קירוב.

(3)

(a)

להלן הוכחה שגרפים עם דרגה מקסימלית k הם $(k+1)$-צביעים. הוכחה באינדוקציה:

עבור $k=0$: צובעים את כל קודקודי הגרף בצבע אחד, מיידי.

נניח נכונות עבור k, ונראה נכונות עבור $k+1$: בהינתן גרף G בו הדרגה המקסימלית היא $k+1$, נסיר ממנו תחילה את כל הקודקודים (והקשתות המחוברות אליהם) בעלי דרגה $k+1$ (אם ישנם שני קודקודים בעלי דרגה כזו ומחוברים ביניהם , ברגע שהסרנו אחד מהם כבר לא נסיר את השני ,

שדרגתו השתנתה). הגרף שנותר הוא בעל דרגה לכל היותר k, ולפי הנחת האינדוקציה ניתן לצביעה ב- $k+1$ צבעים. כעת נוסיף את הקודקודים והקשתות שהסרנו, ונצבע את הקודקודים הללו בצבע חדש. לא יתכן ששניים מהקודקודים שנוספו חזרה יהיו מחוברים ויפסלו את הצביעה, שכן אם כך היה, אז בשלב הסרתם היה מתרחש אחד מהשניים:

- הסרת אחד מביניהם היתה הופכת את השני לבעל דרגה אחת פחות, ואז הוא לא היה מוסר מלכתחילה.
- אם הסרת אחד היתה הופכת את השני לבעל דרגה $k+1$, מכאן שבמקור היה בדרגה $k+2$, בסתירה לנתון.

לפיכך מובטח שהצביעה הנוכחית ב-$k+2$ צבעים הינה חוקית, כנדרש.

להלן תיאור אלג׳ פולי׳ למציאת צביעה חוקית ב-$k+1$ צבעים לגרף שדרגתוk:

בדומה לאינדוקציה לעיל, נסיר לפי הסדר את כל הקודקודים (והקשתות) בעלי דרגה k, לאחריהם את כל אלו בדרגה $k-1$ וכן הלאה עד שיוותרו בגרף קודקודים (וללא קשתות) בדרגה 0. כעת נצבע את כל הקודקודים הללו בצבע 1. לאחר מכן נוסיף לפי הסדר את כל הקודקודים והקשתות בדרגה 1, ונצבע אותם בצבע 2. נמשיך כך את הבנייה המחודשת של הגרף כך שלבסוף נוסיף את הקודקודים בדרגהk ונצבע אותם בצבע ה-$k+1$. בדומה להוכחת האינדוקציה, כל שלב בהוספת הקודקו דים (והקשתות) חזרה לגרף וצביעתם שומר על צביעה חוקית. זמן הריצה פולינומיאלי שכן סה״כ כל קודקוד וקשת מוסרים פעם אחת ומוחזרים פעם אחת, כשלכל קודקוד נבדקת דרגתו מספר לינארי של פעמים, ולכל קודקוד נקבע צבע פעם אחת.

(b)

נניח כי קיים אלג׳ המספק 2-קירוב לבעית *Max-IS*, כלומר בהינתן גרף בעל קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בגודל k, מחזיר לכל הפחות קבוצת קודקודים בלתי תלויה בגודל$\frac{k}{2}$. להלן תיאור אלגוריתם פולי׳ שבהינתן גרף 3-צביע מוצא לו צביעה בזמן פולי׳ ב-$O(\log n)$ צבעים (כאשר $|V|=n$):

- נריץ את אלג׳ 2-קירוב הנתון על הגרף ונקבל את קבוצת הקודקודים $C\subseteq V$.
- נצבע את כל הקודקודים ב-C בצבע כלשהו.
- נמשיך לבצע את הפעולות הנ״ל על תת הגרף $G'=(V\backslash C,E\backslash\{\{c,x\}|c\in C,x\in V\})$ (הסרת הקודקודים שנצבעו והקשתות המחוברות אליהן), כאשר בכל פעם אנו צובעים בצבע שטרם השתמשנו בו בשלבים הקודמים.
- נמשיך כך עד שכל קודקודי G נצבעו.

<u>נכונות</u>:

כיוון שגרף הקלט מובטח להיות 3-צביע, אז ניתן לצבוע את הגרף בצביעה חוקית בשלושה צבעים כך שכל קבוצת קודקודים הצבועים באותו הצבע אינם מחוברים בקשת אחד לשני (אחרת הצביעה לא היתה חוקית). לפיכך קיימים בגרף 3 קבוצות בלתי תלויות (לפחות), ולפיכך לפחות אחת מהן בגודל $\frac{1}{3}\cdot|V|$. כעת, הרצת האלג׳ המספק 2-קירוב ל-*Max-IS* ימצא קבוצה בלתי תלויה בגרף שגודלה הוא לפחות $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot|V|=\frac{1}{6}\cdot|V|$. כמובן שכיוון שקבוצת קודקודים זו בלתי תלויה, ניתן לצבוע את קודקודיה בצבע יחיד, ומובטח שצביעה זו חוקית. כמו כן, כיוון ש בכל איטרציה צובעים את קבוצת הקודקודים המתקבלת בצבע אחר, מובטח שצביעה באיטרציה כלשהי תהיה חוקית ביחס לאיטרציות הקודמות. לפיכך לבסוף תתקבל צביעה חוקית של כל קודקודי הגרף. נכונות מספר הפעולות להלן:

<u>זמן ריצה</u>:

בכל איטרציה מסירים $\frac{1}{6}\cdot|V|$ קודקודים, כלומר מכפילים את גודל הגרף ב- $\frac{5}{6}$. מכאן שמספר האיטרציות שידרשו עד לצביעת כל קודקודי הגרף הוא $O(\log_{\frac{6}{5}} n)$. כיוון שכל איטרציה לוקחת זמן פולי׳ (הפעלת אלג׳ פולי׳ נתון, צביעה של חלק מקודקודי הגרף וניתוק קודקודים וקשתות), אזי האלג׳ הוא פולינומיאלי, כנדרש.

(c)

בהינתן קלט גרף 3-צביע, נבצע את האלגוריתם הבא: כל קודקוד v_i שדרגתו $\geq\sqrt{n}$ נצבע בצבע a_i כלשהו, ולצביעת השכונה של אותו קודקוד (תת הגרף המורכב משכניו של v_i והקשתות המחברות בין אותם שכנים) נסתפק בעוד שני צבעים b_i,c_i לצביעתם. כל קודקוד כזה ושכונתו נצבע בשלישיית צבעים a_i,b_i,c_i שונה. כאשר נותרו רק קודקודים שדרגתם $\geq\sqrt{n}-1$, לפי הוכחת סעיף (a), ניתן לצבוע אותם צביעה חוקית ב-$\sqrt{n}$ צבעים חדשים בזמן פולי׳.

<u>נכונות</u>:

תחילה, כיוון שלכל קודקוד מדרגה $\leq \sqrt{n}$ מספקים צביעה לכל הפחות ל- $\sqrt{n}+1$ קודקודים, ברור כי לכל היותר נחזור על פעולה זו $\sqrt{n}$ פעמים ובכך נשתמש לכל היותר ב-$3\cdot\sqrt{n}$ צבעים. צביעת שכונת כל קודקוד כזה בשני צבעים בלבד אפשרית וחוקית כיוון ששכונת קודקוד כזה היא גרף 2-צביע. אם לא היה 2-צביע, כלומר היה לפחות 3-צביע, ובגרף המקורי הרי כל קודקודי השכונה מחוברים לקודקוד נוסף, הרי שהיינו מקבלים חלק מגרף הקלט שאינו 3-צביע, בסתירה לנתון. נשים לב גם כי כל פעם משתמשים בשלישיית צבעים אחרת, ולכן אין סיכוי לצביעה לא חוקית במהלך האלגוריתם בחלק זה. לפיכך ניתן סה"כ להשתמש ב-$O(\sqrt{n})$ צבעים לצביעת כל קודקודי הגרף שדרגתם $\leq \sqrt{n}$ ושכניהם.

לאחר צביעת כל הקודקודים הנ"ל, מספיק להסתכל על תת הגרף של הקודקודים שטרם נצבעו והקשתות ביניהם ולצבוע תת גרף זה צביעה חוקית, שכן נעשה שימוש בצבעים חדשים, ועל כן אין חשש לצביעה לא חוקית ביחס לחלק הראשון של האלג'. מהוכחת סעיף (a) עולה כי מספיק להשתמש בעוד $\sqrt{n}$ צבעים חדשים כדי לצבוע בצביעה חוקית את תת הגרף. סה"כ נקבל לכל היותר שימוש ב-$4\cdot\sqrt{n}$ צבעים, שזה כמובן $O(\sqrt{n})$ צבעים.

<u>זמן ריצה</u>:

בחלק הראשון נפטרים בכל שלב לפחות מ-$\sqrt{n}+1$ קודקודים, וידוע ששכונת כל קודקוד כזה היא גרף 2-צביע, לו ניתן למצוא צביעה בזמן פולי'. לפיכך בחלק הראשון יהיו לכל היותר $\sqrt{n}$ איטרציות. החלק השני הוכח שרץ בזמן פולי' בסעיף (a). סה"כ נקבל כי ריצת האלג' היא פולי'.

(4)

נגדיר את בעיית האופטימיזציה (מינימיזציה) *Min-Wieght-VC* באופן הבא: בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ ופונ' משקלות על הקודקודים $w\colon V\to R$, מחזירה תת קבוצת קודקודים $V'\subseteq V$ המהווה כיסוי קודקודים בגרף G, שמשקלה מינימלי ($w(V')=\sum_{v\in V'}w(v)$).

תחילה נתאר את הבעיה כבעיית *Integer Programming* באופן הבא:

- לכל קודקוד $v\in V$ נחזיק משתנה x_v, כאשר $x_v=\begin{cases}1, v\in VC\\ 0, \quad o/w\end{cases}$.
- נרצה למזער את $\sum_{v\in V}w(v)\cdot x_v$ (ע"י השמת ערכים ל-x_v) תחת ההגבלות:
  - לכל $u,v\in E$ מתקיים $x_v+x_u\geq 1$.
  - $\forall v\in V. x_v\in\{0,1\}$.

כעת נתאר את הבעיה כ בעיית *Linear Programming* באופן הבא: פשוט נחליף את ההגבלות $\forall v\in V. x_v\in\{0,1\}$ בהגבלות $\forall v\in V. x_v\in[0,1]$.
נשים לב כי פתרון לבעיה המקורית מהווה פתרון לבעית ה-*Linear Prog.* וכי בעיה זו ניתנת לפתרון פולי' בעזרת אלג' האליפסואיד. כמו כן אם נסמן את הפתרון האופטימלי של הבעיה המקורית ב- C, והפתרון האופטימלי של בעית ה-*Linear Prog.* ב-C^*, ברור כי מתקיים $C^*\leq C$, שכן באחרון ערכי x_v יכולים להיות שבריים (הקלנו בתנאים).

להלן אלג' קירוב לבעית ה-*Min-Weight-VC*: נמצא פתרון אופטימלי בזמן פולי' ונגדיר את C^* כיסוי הקודקודים כ-$C^*=\{v\in V|x_v\geq 0.5\}$.

- ברור כי זמן הריצה פולי' בזכות אלג' האליפסואיד.
- הפלט הוא כיסוי חוקי של צמתים כי לכל קשת (u,v) מתקיים $x_u+x_v\geq 1$ ולכן $x_u\geq 0.5$ או $x_v\geq 0.5$, ולכן (u,v) מכוסה. למעשה מעבירים את התנאים לתנאי הבעיה המקורית ע"י עיגול כל $x_v\geq 0.5$ ל-1 וכל $x_v<0.5$ ל-0.
- נראה כי מתקיים $w(C)\leq 2\cdot w(C^*)$:

$w(C^*)=\sum_{v\in V}w(v)\cdot x_v$ עבור בעית ה-*Linear Prog.* כיוון שפתרון עבור הבעיה המקורית הוא בפרט פתרון עבור בעית ה-*Linear Prog.* צריך להתקיים $w(C^*)\leq w(C)$: או $w(C^*)=w(C)$, כלומר הפתרון האופטימלי לבעית ה-*Linear Prog.* הוא הפתרון לבעיה המקורית, או שיוכל לשפרו.

כעת נראה שעיגול ערכי x_v כמתואר לעיל מספק פתרון C^{**} המקיים: $w(C^{**})\leq 2\cdot w(C^*)$:

$$w(C^*)=\sum_{v\in V}w(v)\cdot x_v\geq\sum_{v\in V,x_v\geq 0.5}w(v)\cdot x_v\geq\sum_{v\in V,x_v\geq 0.5}w(v)\cdot 0.5=\sum_{v\in C^{**}}w(v)\cdot 0.5=0.5\cdot w(C^{**})$$

ומכאן מתקבל $w(C^{**})\leq 2\cdot w(C^*)\leq 2\cdot w(C)$. לפיכך אלג' זה מספק 2-קירוב לבעית *Min-Weight-VC*.

(5)

טענה: לא ניתן לקרב את $MAX-5SAT$ בזמן פולינומיאלי בפקטור $c=\frac{32}{31}-\varepsilon$ לכל $\varepsilon>0$ אלא אם $P=NP$. נראה כי הבעיה $GAP-5SAT\left[\frac{31}{32}+\varepsilon,1\right]$ היא NP-קשה. נראה רדוקציה מהבעיה שראינו בהרצאה $GAP-E3SAT\left[\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right]$ אל $GAP-5SAT\left[\frac{31}{32}+\varepsilon,1\right]$. כיוון שידוע ממשפט ה-$PCP$ שבעית $GAP-E3SAT\left[\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right]$ היא NP-קשה, נקבל כי גם בעית $GAP-5SAT\left[\frac{31}{32}+\varepsilon,1\right]$ היא NP-קשה. כיוון שידוע שאם ניתן לקרב בעיה בפקטור h עם אלג׳ פולי׳ אז לכל C ניתן למצוא פתרון פולי׳ לבעיה $GAP[C,hC]$, נקבל במקרה זה שלא ניתן לקרב את הבעיה $MAX-5SAT$ בפקטור $\frac{32}{31}-\varepsilon$.

בהינתן קלט φ לבעית $GAP-E3SAT\left[\frac{7}{8}+\varepsilon,1\right]$, נבנה נוסחת $5CNF$ חדשה ψ בה לכל הסגר C_i ב-φ יהיו 4 עותקים, כאשר בכל עותק יתווספו 2 משתנים חדשים q_i,r_i באופן הבא: במחצית מהעותקים יופיע q_i ובמחצית השניה $\overline{q_i}$, כאשר בכל אחת מהמחציות יופיע בהסגר אחד r_i ובהסגר השני $\overline{r_i}$: $C_i=(x\lor y\lor z)\to(x\lor y\lor z\lor q_i\lor r_i)\land(x\lor y\lor z\lor q_i\lor\bar{r}_i)\land(x\lor y\lor z\lor\bar{q}_i\lor r_i)\land(x\lor y\lor z\lor\bar{q}_i\lor\bar{r}_i)$. ברור כי הבניה היא בזמן פולי׳.

אם φ ספיקה על כל הסגריה, ברור כי גם ψ ספיקה. אם φ ספיקה בפחות מ-$\frac{7}{8}+\varepsilon$ מהסגריה, נבחן את הסיכוי של כל הסגר ב-ψ. לכל הסגר סיכוי להיות מסופק מהליטרלים המקוריים שלו מ-φ של $<\frac{7}{8}+\varepsilon$, ולזאת נוסיף את הסיכוי שאינו מסופק מהליטרלים המקוריים שלו מ-φ כפול הסיכוי שלו להיות מסופק מהליטרלים החדשים שלו: $(\frac{1}{8}-\varepsilon)\cdot\frac{3}{4}$ (אפילו גדול מכך, אך מספיק לקחת אותו במדויק). סה״כ נקבל כי הסיכוי של כל הסגר להיות מסופק קטן מ- $\frac{31}{32}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{7}{8}+\varepsilon+\left(\frac{1}{8}-\varepsilon\right)\cdot\frac{3}{4}$, לכל $\varepsilon>0$.

אם כן קיבלנו כי הבעיה $GAP-5SAT$ היא NP-קשה. ברור כי רק אם $P=NP$ היינו מקבלים ש בעית $MAX-5SAT$ היא ב-P ואז כמובן שניתן לקרבה אף בפקטור $c=1$ (לפתור אותה בזמן פולי׳).