סיבוכיות / תרגיל בית #2

אריאל סטולרמן

(1)

נסמן רדוקצית $Cook$ פולי' משפה A לשפה B כך: $A \underset{c.p.}{\leq} B$. להלן הוכחה שהמחלקה P סגורה תחת רדוקציות $Cook$ פולי':

יהיו $L, L' \subseteq \{0,1\}^*$, $L \in P$ ו-$L' \underset{c.p.}{\leq} L$. נראה ש-$L' \in P$ גם כן.

כיוון ש-$L' \underset{c.p.}{\leq} L$ אזי קיים אלג' פולי' באורך הקלט שמכריע את L' תוך שימוש באלג' שמכריע את L. נסמן את הזמן הפולי' בו מכריע את L' (תוך התחשבות בקריאות לאלג' המכריע את L כיחידת זמן ריצה אחת) ב-$p_1(n)$, כאשר n אורך הקלט x. כמו כן נתון כי $L \in P$, אזי האלג' המכריע את L עושה זאת בזמן פולי', נסמן זמן זה ב-$p_2(n)$. סה"כ האלג' המכריע את L' עושה זאת בזמן $p_1 \circ p_2(n)$, וכיוון שהרכבת פולינומים היא פולינום, נקבל שזהו זמן פולי' באורך הקלט x. לפיכך $L' \in P$.

(2)

(a) להלן הוכחה ש-$NAE-3SAT \in NPC$:

1. $NAE-3SAT \in NP$: בהינתן φ עליה רוצים להראות שייכות ל-$NAE-3SAT$ ניקח כעד הצבה מספקת ונבדוק שהצבה זו עונה על דרישות השפה, כלומר לכל פסוקית יש לפחות ליטרל אחד המקבל t ואחד המקבל f, וכמובן נבדוק שההצבה אכן מספקת. גם העד וגם זמן ריצת המוודא הן לינאריות באורך φ.
2. נראה כעת כי $3SAT \leq_p NAE-3SAT$ ע"י: בהינתן נוסחה $\varphi \in 3CNF$ נבנה את הנוסחה הבאה $f(\varphi) := \psi$: לכל פסוקית i מהצורה $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ ב-φ נשים את הפסוקיות $(x_1 \vee x_2 \vee y_i)$ ו-$(\overline{y_i} \vee x_3 \vee z)$ ב-ψ, כאשר y_i הוא משתנה חדש שאינו מופיע ב-φ, ו-z גם כן משתנה חדש (לכל זוג פסוקיות ב-ψ יש y_i משלה, אך z קבוע לכל הפסוקיות). ברור כי זמן הבניה הוא פולי'.

$\varphi \in 3SAT \Rightarrow \psi \in NAE-3SAT$: אם φ ספיקה, אזי לפחות אחד מ-x_1, x_2, x_3 מקבל ערך אמת t. נשים ב-z תמיד את ערך האמת f ונשים לב: אם x_1 או x_2 מקבלים t, נשים ב-y_i את הערך f, אחרת נשים בו t. כך בכל אחד מזוגות הפסוקיות יש גם t וגם f.

$\psi \in NAE-3SAT \Rightarrow \varphi \in 3SAT$: אם ל-$\psi$ יש הצבה מספקת מתאימה, אזי ההצבה המשלימה לה גם כן מספקת, שכן בכל פסוקית יש ערך אמת t אחד לפחות וגם ערך אמת f אחד לפחות. לפיכך ניתן לקחת הצבה ל-ψ בה $z = f$, ואז זוג הפסוקיות שקול ל: $(x_1 \vee x_2 \vee y_i) \wedge (\overline{y_i} \vee x_3 \vee \boldsymbol{f})$. קל לראות כי אם ההצבה מספקת אזי לפחות אחד מ-x_1, x_2, x_3 מקבל ערך t. לפיכך כל פסוקית ב-φ מסתפקת ולכן $\varphi \in 3SAT$.

מכאן שמתקיים $\varphi \in 3SAT \Leftrightarrow f(\varphi) \in NAE-3SAT$, ולכן $3SAT \leq_p NAE-3SAT$. כיוון ש-$3SAT \in NP-hard$ אזי גם $NAE-3SAT \in NP-hard$.

כיוון ש-$NAE-3SAT \in NP, NP-hard$ אזי $NAE-3SAT \in NPC$, כנדרש.

(b) טענה: $EVEN-NAE-3SAT \notin NP-hard$.

הוכחה: למעשה מתקיים כי $EVEN-NAE-3SAT = 3CNF$. תהי $\varphi \in 3CNF$. אם ל-φ יש הצבה בה בכל פסוקית לפחות t אחד ולפחות f אחד, אז ניתן לקחת (כאמור) את ההצבה המשלימה וגם היא תהיה מספקת. לפיכך, אם ל-φ הצבה חוקית מספקת, יהיה לה מספר זוגי של הצבות חוקיות מספקות ולכן $\varphi \in EVEN-NAE-3CNF$. אם ל-$\varphi$ אין הצבות חוקיות מספקות, אז מספר ההצבות החוקיות המספקות שלה הוא 0, ולכן גם במקרה זה $\varphi \in EVEN-NAE-3SAT$. לפיכך כל $\varphi \in 3CNF$ גם שייכת ל-$EVEN-NAE-3SAT$, וברור שכל φ באחרונה שייכת גם ל-$3CNF$. לכן מתקיים שוויון בין השפות, וכיוון ש-$3CNF$ ב-P (בדיקה לינארית האם השפה היא מתחביר $3CNF$), אזי גם $EVEN-NAE-3SAT$, ולכן האחרונה אינה NP-$hard$.

(3)

(a) להלן הוכחה ל: $G=(V,E)\in 2-Col \Leftrightarrow G\ has\ no\ cycle\ of\ odd\ length$.

נשתמש בטענה כי גרף לא מכוון הוא דו-צדדי ($V=V_1 \uplus V_2$) אמ"מ אין בו מעגל באורך אי-זוגי. הוכחה לטענה:

תחילה, נניח כי הגרף קשיר. אם אינו קשיר, נבצע את הבדיקה על כל אחד מרכיבי הקשירות שלו.

$\Leftarrow$: אם גרף הוא דו"צ, כל קשת מעבירה אותנו מ-V_1 אל V_2 וחזרה, ולכן כדי לחזור לאותו צומת ממנו יצאנו צריך מספר זוגי של קשתות במעגל.

$\Rightarrow$: מריצים מצומת s כלשהו BFS. מסתכלים על חלוקת הצמתים לפי השכבות המתקבלות מה-BFS. נטען שלא קיימות קשתות המחברות שני צמתים באותה שכבה j, אחרת היינו מקבלים מעגל שאורכו $2j+1$ (אי זוגי, בניגוד להנחה). לפיכך, כל קשת מחברת לצומת בשכבות הסמוכות (מתכונות ה-BFS), ולכן נוכל לחלק את צמתי הגרף לשתי קבוצות לפי השכבות הזוגיות והאי זוגיות. לכן הגרף הוא דו"צ.

אם גרף הוא דו"צ אזי לא קיימות קשתות המחברות שני צמתים מ-V_1 או שני צמתים מ-V_2, ולכן כל גרף דו"צ הוא $2-Col$ כך שאת כל הצמתים ב-V_1 נצבע בצבע אחד, ואת כל הצמתים ב-V_2 בצבע אחר.

מכאן נקבל את הנדרש: $G\in 2-Col \Leftrightarrow G\ is\ bipartite \Leftrightarrow G\ has\ no\ cycle\ of\ odd\ length$.

מכאן שמתקיים $2-Col\in P$. להלן אלג' הרץ בזמן פולי' המכריע את $2-Col$: כמתואר בהוכחת טענת העזר, ע"י הרצת BFS מצומת כלשהו ובדיקה האם קיימת קשת המחברת שני צמתים באותה שכבה, נוכל לקבוע האם קיים מעגל אי זוגי בגרף. אם לא, נחזיר שהגרף שייך ל-$2-Col$, אחרת נחזיר שאינו שייך. הנכונות נובעת מההוכחה לעיל, וזמן הריצה לינארי שכן סה"כ מריצים BFS ולאחר מכן עוברים על כל קשתות הגרף.

(b) להלן הוכחה ש-$3-Col\in NPC$:

1. $3-Col\in NP$: עבור קלט G ניקח כעד צביעה בשלושה צבעים לכל צמתי הגרף. האלג' המוודא יעבור על כל הקשתות ויבדוק שאף קשת אינה מחברת בין שני צמתים בעלי אותו צבע. ברור כי העד וזמן ריצת האלג' המוודא הם פולי' באורך הקלט G.
2. נראה רדוקציה $NAE-3SAT\leq_p 3-Col$ ע"י f: בהינתן $\varphi\in 3CNF$ נבנה את הגרף $f(\varphi)=G$ הבא: לכל ליטרל $(x_i,\overline{x_i})$ נשים צומת בגרף, ונוסיף צומת נוסף w שיחובר לכל הליטרלים. כל ליטרל נחבר בקשת להופכי שלו. לכל פסוקית נוסיף שלושה צמתים חדשים מחוברים אחד לשני בקשתות (משולש), וכל ליטרל בפסוקית נחבר בקשת לאחד הצמתים במשולש שבנינו. למשל, עבור $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3})$, נבנה משולש שקודקודיו u_1,u_2,u_3 (צמתים מחוברים בקשתות אחד לשני), ונחבר את x_1 ל-u_1, x_2 ל-u_2 ו-$\overline{x_3}$ ל-u_3. נסמן את 3 הצבעים ב-0,1,2. בה"כ נבחר לצבוע את w ב-2. ברור כי זמן הבניה הוא פולי' בגודל φ שכן פולי' במספר הליטרלים והפסוקיות ב-φ.

נניח $\varphi\in NAE-3SAT$. בגרף שבנינו נצבע את הליטרלים שקיבלו t ב-1 ואת אלה שקיבלו f ב-0 (לא ניתן לצבוע אותם ב-2, כי w צבוע ב-2 ומחובר לכולם, וכיוון שמחוברים אחד לשני חייבים להיות בצבעים הופכיים). כעת, נסתכל על כל משולש המחובר לשלושה ליטרלים: כיוון שקיימים לפחות ליטרל אחד בצבע 1 ואחד בצבע 0, ניתן לצבוע את זה המחובר ל-1 ב-0, זה המחובר ל-0 ב-1 והנותר ב-2 (אינו מחובר ל-w). מכאן קיבלנו צביעה חוקית, ולכן $G\in 3-Col$.

נניח $\varphi\notin NAE-3SAT$. צביעת w וכל הליטרלים זהה לחלק הקודם. כיוון שקיימת לפחות פסוקית אחת בה כל הליטרלים מקבלים t או f, אזי בגרף קיים לפחות משולש אחד שניתן לצבוע את קודקודיו בשני צבעים בלבד: או 0 ו-2 או 1 ו-2. לפיכך $G\notin 3-Col$.

מכאן ש-$\varphi\in NAE-3SAT \Leftrightarrow f(\varphi)\in 3-Col$. כיוון ש-$NAE-3SAT\in NP-hard$, אזי גם $3-Col\in NP-hard$.

כיוון ש-$3-Col\in NP, NP-hard$ אזי $3-Col\in NPC$, כנדרש.

(c)

$i)$ $2009-Col\in NPC$:

שייכות ל-NP מוכחת באותו אופן כמו עבור $3-Col$: ניקח כעד צביעה מתאימה ב-2009 צבעים (בגודל לינארי לקלט) ובזמן לינארי נבדוק שכל קשתות הגרף לא מחברות בין שני צמתים בעלי אותו צבע.

$3-Col\leq_p 2009-Col$: בהינתן גרף G ($V=\{v_1,\dots,v_n\}$) נוסיף לו 2006 צמתים חדשים $u_1,\dots,u_{2006}$ וכל אחד מהם נחבר בקשתות לכל אחד מצמתי הגרף (כולל לצמתים החדשים עצמם). ברור כי הבניה הינה פולי' באורך הקלט, שכן סה"כ מוסיפים $2006\cdot|V|$ קשתות חדשות ו-2006 צמתים חדשים. נסמן את הגרף החדש ב-G'.

טענה: $G\in 3-Col \Leftrightarrow G'\in 2009-Col$:

נניח $G\in 3-Col$, אזי את G' ניתן לצבוע באופן הבא: את $v_1,\dots,v_n$ נצבע כפי שניתן לצבוע בצביעה חוקית את G בצבעים 1,2,3. את $z_1,\dots,z_{2006}$ נצבע ביתר 2006 הצבעים בהם לא השתמשנו, z_1 בצבע 4, z_2 בצבע 5 וכן הלאה. כיוון שצביעת $v_1,\dots,v_n$ חוקית, וברור שצביעת שאר הצמתים חוקית, אזי צביעת G' ב-2009 צבעים חוקית, ולכן $G'\in 2009-Col$.

נניח $G \notin 3-Col$, אזי את G' לא ניתן לצבוע בצביעה חוקית: כיוון שכל $z_1, \dots, z_{2006}$ מחוברים לכל צמתי הגרף, נאלצים לצבוע כל אחד מהם בצבע נפרד, בה"כ z_1 בצבע 1, z_2 בצבע 2 וכן הלאה. לבסוף נותרים $v_1, \dots, v_n$ ושלושה צבעים, אך כיוון של-G אין צביעה חוקית בשלושה צבעים, גם ל-$v_1, \dots, v_n$ ב-G' אין צביעה חוקית בשלושה צבעים. מכאן ש-$G' \notin 2009-Col$.

מכאן $G \in 3-Col \Leftrightarrow G' \in 2009-Col$, ולכן הרדוקציה מתקיימת. כיוון ש-$3-Col \in NP-hard$ אזי גם $2009-Col \in NP-hard$.

כיוון ש-$2009-Col \in NP, NP-hard$ אזי $2009-Col \in NPC$, כנדרש.

ii) $k-Col = \{< G, k > | \ G \ is \ k-colorable\} \in NPC$:

הוכחה לכך ש-$k-Col \in NP$ באופן דומה לסעיף הקודם: בהינתן $< G, k >$ ניקח כעד צביעה ב-k צבעים לצמתי G, ונוודא בזמן פולי' שהצביעה חוקית. רדוקציה $3-Col \leq_p k-Col$: בהינתן גרף G נחזיר את הזוג $< G, 3 >$. ברור כי $G \in 3-Col \Leftrightarrow$ ניתן לצבוע את G באופן חוקי בשלושה צבעים $\Leftrightarrow < G, 3 > \in k-Col$. מכל הנ"ל נובע כי $k-Col \in NPC$, כנדרש.

iii) $CliqueCover = \{< G, k > | \ G \ can \ be \ partitioned \ into \ k \ cliques\} \in NPC$:

1. $CliqueCover \in NP$: בהינתן $< G, k >$ ניקח כעד חלוקה של G ל-k קליקים זרים בצמתים, וברור שחלוקה זו בגודל פולי' בגודל הקלט. נוודא בזמן פולי' ע"י מעבר על כל קשתות הגרף שכל הקבוצות אכן מהוות קליק וזרות בצמתים.
2. $k-Col \leq_p CliqueCover$: בהינתן $< G, k >$ נחזיר את $< G', k >$ כאשר G' הוא הגרף המשלים של G (כלומר כל קשת ב-G אינה ב-G' וכל קשת שאינה ב-G תהיה ב-G'). ברור שהבניה פולי' בגודל הקלט.

נניח $< G, k > \in k-Col$, אזי ניתן לצבוע צביעה חוקית את צמתי G ב-k צבעים שונים. הצביעה שקולה לחלוקת צמתי הגרף ל-k קבוצות בלתי תלויות (*Independent Sets*), שכן כל זוג צמתים בעלי אותו צבע בהכרח אינם מחוברים בקשת אחד לשני. נותר להראות כי ב-G יש k קבוצות בלתי תלויות אמ"מ ב-G' יש k קליקים זרים בצמתים: בכל קבוצה בלתי תלויה ב-G אין זוג צמתים המחוברים בקשת אחד לשני, ומכאן שבגרף המשלים כל צמתי הקבוצה הזו יהיו מחוברים זה לזה, ולכן יהוו קליק. לכן ניתן לחלק את G' ל-k קליקים זרים בצמתים, ולפיכך $< G', k > \in CliqueCover$.

נניח $< G, k > \notin k-Col$, אזי לא ניתן לצבוע את G צביעה חוקית בגודל k, ולפיכך לא קיימת חלוקה של צמתי הגרף ל-k קבוצות בלתי תלויות שונות. מכאן שבגרף המשלים לא קיימת חלוקה ל-k קליקים זרים בצמתים, ולכן $< G', k > \notin CliqueCover$.

כיוון ש-$k-Col \in NP-hard$ אזי גם $CliqueCover \in NP-Hard$.

מכל הנ"ל נובע כי $CliqueCover \in NPC$, כנדרש.