אלגוריתמים / תרגיל 3#

אריאל סטולרמן
קבוצה 02

(1)

יהי $G = \{V, E\}$ גרף לא מכוון, ותת קבוצה $W \subseteq V$, ושני צמתים $s, t \in V$. להלן אלגוריתם למציאת מסלול מ-s ל-t העובר במספר מינימלי של צמתים מ-W:

- נהפוך את הגרף למכוון ע״י הפיכת כל $(u, v) \in E$ לא מכוונת לשתי קשתות $(u, v), (v, u)$ מכוונות. נקרא לגרף זה G' ($|E'| = 2|E|,\ V' = V$).
- ניצור פונקציית משקל $w: E' \to \{0,1\}$ באופן הבא: לכל $(u, v) \in E'$ אם $v \in W$ אז $w(u, v) = 1$ אחרת $w(u, v) = 0$.
- נמצא ב-G' באמצעות אלגוריתם *Dijkstra* מק״בים מ-s, והמק״ב שנמצא ל-t יהיה המסלול אותו אנו מחפשים (ניתן להוציאו ע״י מצביעי π מ-t).

נכונות:

משקל כל המסלולים שנמצא מ-s ל-t מושפע אך ורק מקשתות המובילות לצמתים ב-W, כיוון שרק הן תורמות 1 למשקל המסלול. לכן, מציאת מק״ב בהכרח תמצא לנו את המסלול (או אחד מהם) עם המספר המינימלי של כניסות לצמתים ב-W, ולכן מסלול העובר במספר מינימלי של צמתים ב-W.

כיוון שכל המשקלות שהגדרנו אי שליליים, ניתן להשתמש באלגוריתם *Dijkstra* למציאת המק״בים (בפרט אין מעגלים שליליים).

סיבוכיות:

שלב יצירת G' ושלב הגדרת w הוא $O(|V| + |E|)$, ואם נממש ע״י ערימת פיבונצ׳י אז שלב הפעלת אלגוריתם *Dijkstra* הוא $O(|V| \cdot log(|V|) + |E|)$. סה״כ: $O(|V| \cdot log(|V|) + |E|)$.

(2)

יהי $G = \{V, E\}$ גרף מכוון עם פונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$, וקודקוד $s \in V$. להלן אלגוריתם למציאת מק״בים לפי הגדרת אורך מסלול החדשה:

אין צורך בהנחה שאין משקלות שליליים. נשתמש באלגוריתם *Dijkstra* עם שינוי בפוקנצית ה-*Relax*:

$Relax(u, v, w)$

$if\ d(v) > max\ \{w(u, v), d(u)\}$

$\quad d(v) \leftarrow max\ \{w(u, v), d(u)\}$

$\quad \pi(v) \leftarrow u$

נכונות:

שינינו את פונקצית ה-*Relax* כך שלכל (u, v) מעדכנת את ערך ה-$d(\cdot)$ ומצביע ה-π בהתאם להגדרה החדשה: אם מתקיים התנאי, אזי משקל הקשת הכבדה ביותר במסלול מ-u נמוך ממשקל הקשת הכבדה ביותר במסלול הנוכחי, ולכן נעדכן את אותו משקל להיות המשקל הכבד ביותר במסלול החדש, מ-u. משקל זה כמובן יהיה המקסימום מבין $d(u)$ ו-$w(u, v)$,

כיוון ש-$d(u)$ הוא משקל הקשת הכבדה ביותר מ-s ל-u, ו-$w(u,v)$ הוא משקל הקשת מ-u ל-v, ולכן המקסימום מביניהם ייתן בהכרח את המשקל הכבד ביותר במסלול מ-s ל-v. באופן פורמלי נוכיח באינדוקציה על מס׳ הקשתות במסלול:

עבור s ברור, שכן $d(s)=\delta(s,s)=0$ כיוון שאין קשתות בין s לעצמו אז מתקיים תנאי ריק.

נניח נכונות עבור *k-1*, נראה נכונות עבור k:

יהי $v\in V$ צומת וקשת $(u,v)\in E$ כך שאורך המק״ב מ-s ל-u הוא *k-1*. נבצע *Relax* על הקשת (u,v): אם תנאי ההתחלה לא מתקיים, אזי $d(v)$ מחזיק במשקל הכבד ביותר של מסלול מ-s אליו, אך שאינו כבד ממשקל הקשת הכבדה ביותר מ-s אליו במסלול העובר דרך u. אם התנאי כן מתקיים, אזי מצאנו מסלול העובר דרך u מ-s ל-v בו המשקל המקסימלי של קשת במסלול קטן מהמשקל המקסימלי של קשת במסלול הנוכחי השמור ב-v. לפי הנחה, $d(u)$ מחזיק במשקל המקסימלי של קשת במסלול מ-s ל-u, ולכן בעדכון v מספיק לבדוק את $\max\{d(u),w(u,v)\}$ כדי לקבל את המשקל המקסימלי של קשת במסלול מ-s ל-v העובר דרך u. כמובן, גם $\pi(v)$ מתעדכן בהתאם.

כיוון שאנו לא צוברים משקל כמו באלגוריתם המקורי, אנו יכולים לעבוד גם על גרף בעל משקלות שליליים, כיוון שאנו מחפשים משקל של קשת כלשהי לכל צומת, וזה תמיד יהיה מספר קבוע (ואם בכל זאת יש בעיה, אז אם x הוא המשקל הנמוך ביותר בגרף, ניתן להעלות את כל המשקלים ב-$|x|$ כדי לקבל משקלות אי-שליליים, ובסוף לעדכן את כל ערכי $d(\cdot)$ חזרה ע״י החסרת $|x|$). לכן כאשר תם האלגוריתם בהכרח מצאנו לכל צומת את המק״ב לפי ההגדרה החדשה.

סיבוכיות:

במימוש ע״י ערימת פיבונצ׳י: $O(|V|\cdot log(|V|)+|E|)$ (כמו האלגוריתם המקורי).

(3)

יהי $G=\{V,E\}$ גרף מכוון עם פונקצית משקל חיובית $w:E\to\mathbb{R}^+$, קודקוד $s\in V$, ופונקציה $f:V\to\mathbb{R}^+$. להלן אלגוריתם לינארי הבודק האם $\forall v\in V: f(v)=\delta(s,v)$:

נניח כי אין מעגלים שליליים ב-G. כמו כן נניח כי כל קודקוד ב-G נגיש מ-s. ניתן להניח זאת שכן כל ערך f של כל קודקוד הוא מספר סופי ב-$\mathbb{R}^+$, ולכן אינו ∞, אך אם קיים $v\in V$ שאינו נגיש מ-s, אז $d(v)=\infty$ גם לאחר ביצוע אלגוריתם מציאת מק״בים כלשהו, ואז גילינו $v\in V$ עבורו $f(v)\neq\infty=\delta(s,v)$, ויֵשר נחזיר F.

- נבדוק תחילה האם $f(s)=0$. אם לא, נסיים ונחזיר F.
- ניצור קבוצת קשתות חדשה מאותחלת להיות ריקה $E'=\{\}$.
- נעבור על כל הקשתות $(u,v)\in E$: אם $f(v)>f(u)+w(u,v)$, נחזיר F. אם $f(v)=f(u)+w(u,v)$, נשים את (u,v) ב-E'.
- נריץ *BFS* על הגרף $G'=\{V,E'\}$. אם קיים קודקוד לאחר ה-*BFS* שערך ה-$d(\cdot)$ שלו הוא ∞, נחזיר F. אחרת נחזיר T.

נכונות:

הוכחה באינדוקציה על מספר הקשתות במק״ב:

ראשית, אם $f(s)\neq 0$, ישר ניתן להחזיר F, שכן ודאי ש-$f(s)\neq\delta(s,s)=0$.

כל מסלול שנותר בגרף G' הוא בעל אורך $f(v)$, שכן מוגדר ברקורסיה ע״י $f(v)=f(u)+w(u,v)$, ולכן מתקיים כי $f(v)\geq\delta(s,v)$, לכל $v\in V$. נותר להוכיח אם כן אי שוויון חלש לכיוון השני כדי להוכיח שוויון. ע״פ הנחת האינדוקציה, נניח כי u הוא הקודקוד שלפני v במק״ב ל-v, אזי מתקיים $f(u)\leq\delta(s,u)$. כיוון שכל הקשתות (u,v) ב-E' מקיימות

$f(v) = f(u) + w(u,v)$, אזי יתקיים כי: $\delta(s,v) = \delta(s,u) + w(u,v) \geq f(u) + w(u,v) = f(v)$ ולכן $\delta(s,v) = f(v)$ לכל $v \in V$.

כאשר נריץ BFS על הגרף G', כל ערכי ה-$d(\cdot)$ שנקבל יהיו שונים מ-∞ רק אם כל הקודקודים $v \in V$ נגישים מ-s דרך הקשתות שנותרו לנו ב-E' לאחר הסינון. אם קיימים קודקודים לא נגישים, אז הקשתות שמרכיבות את המק״בים לאותם קודקודים לא נמצאות ב-E', ולכן $f(v) \neq \delta(s,v)$ עבור אותם קודקודים v, ולכן נחזיר F.

סיבוכיות:

סה״כ עוברים על רשימת הקשתות, מבצעים BFS בזמן לינארי, ועוברים על רשימת הקודקודים לאחר ה-BFS. לכן הסיבוכיות היא לינארית כמבוקש: $O(|V| + |E|)$.

(4)

יהי $G = \{V, E\}$ גרף לא מכוון עם משקלים אי-שליליים על הקשתות (פונקצית משקל $w: E \to R^{+} \cup \{0\}$), לכל קשת ערך $c(\cdot)$ שיכול להיות b/r (כחול או אדום), ויהי קודקוד $s \in V$. להלן אלגוריתם המתאר מציאת מק״בים מ-s עם שלוש קשתות אדומות לכל היותר:

נניח כי אין לכל $v \in V$ קיים מסלול כלשהו מ-s בו לכל היותר 3 קשתות אדומות.

- תחילה, נהפוך את הגרף למכוון ע״י הפיכת כל $(u,v) \in E$ ל-$(v,u), (u,v)$ קשתות מכוונות.
- לשם נוחות, עבור צומת $v \in V$ נסמן $v_i = (v,i), \forall 0 \leq i \leq 3$.
- נגדיר $G' = \{V', E'\}$ כדלהלן:
  - o $V' = \{v_i \mid 0 \leq i \leq 3, v \in V\}$
  - o $E' = \{(u_i, v_i) \mid 0 \leq i \leq 3, c(u,v) = b\} \cup \{(u_i, v_j) \mid 0 \leq i < j \leq 3, c(u,v) = r\}$, ומתקיים כי פונקציית המשקלות w מחזירה $w(u,v)$ לכל $w(u_i, v_j), \forall i,j$.
- נריץ אלגוריתם $Dijkstra$ על G' מ-s_0.
- לכל $v \in V$ נעדכן את ערך $d(\cdot)$ באופן הבא: $d(v) \coloneqq \min\{d(v_i) \mid 0 \leq i \leq 3,\ v_i \in V'\}$

נכונות:

הרעיון הוא ליצור 4 עותקים של הקודקודים, ולכל קשת כחולה ליצור עותק לכל אחד מעותקי קבוצות הקודקודים, ולכל קשת אדומה ליצור קשת מעבר מעותק אחד של קבוצת הקודקודים לעותק לידו. לכל היותר יהיו 3 מעברים כאלה, ולכן 3 קשתות אדומות במסלול.

מההגדרות נובע כי קיים מסלול מ-s ל-t העובר לכל היותר ב-3 קשתות אדומות אס״ם קיים מסלול מ-s_0 ללפחות אחד מבין t_0, t_1, t_2, t_3. כיוון שאנו מניחים כי לכל קודקוד מסלול נגיש מ-s בעל לכל היותר 3 קשתות, אזי בגרף G' לכל קודקוד t בגרף המקורי יהיה מסלול מ-s_0 לאחד מעותקי t.

בסיום הרצת $Dijkstra$ על G', יתכנו לנו ארבעה ערכי $d(\cdot)$ אפשריים – אחד היושב בכל עותק של t (לא חייב להיות לכל עותק). כל אחד מסמן את אורך המק״ב הכולל בתוכו 0,1,2,3 קשתות אדומות. כיוון שכל אחד מהם ״חוקי״ מבחינת תנאי השאלה, ניקח את המינימלי והוא כמובן מק״ב מ-s ל-t בגרף המקורי, תחת תנאי הקשתות האדומות.

סיבוכיות:

יצירת העותקים לוקחת זמן לינארי, וכיוון שהגדלנו את $|V|, |E|$ פי קבוע והרצנו $Dijkstra$, אז סיבוכיות האלגוריתם תהיה במימוש ע״י ערימת פיבונצ׳י: $O(|V| \cdot log(|V|) + |E|)$.

(5)

יהי $G=\{V,E\}$ גרף מכוון ללא מעגלים מכוונים שליליים עם פונקצית משקל $w: E \to R$, ויהי קודקוד $s \in V$. לכל $v \in V$ מתקיים כי במק״ב מ-s ל-v יש לכל היותר m קשתות. להלן אלגוריתם למציאת מק״בים ב-G בסיבוכיות זמן ריצה של $O(m \cdot |E|)$:

פשוט נריץ את אלגוריתם *Bellman-Ford* רק m איטרציות ללולאת ה-*for* הראשונה (במקום $|V|-1$).

נכונות וסיבוכיות:

לפי הוכחת נכונות אלגוריתם *Bellman-Ford* בהרצאה, אחרי k איטרציות מתקיים כי לכל u הנמצא במרחק מסלול עד k מ-s, מתקיים $d(u)=\delta(s,u)$. לכן, אחרי m איטרציות נגיע לחישוב כל המק״בים שאורכם עד m קשתות במק״ב, וזה לפי הנתון כל המק״בים בגרף, ולכן סיימנו, ובסיבוכיות המבוקשת: $O(m|E|)$ (במקום $O(|V| \cdot |E|)$ באלגו׳ המקורי).