אלגוריתמים / תרגיל 1#

אריאל סטולרמן
קבוצה 02

(1)

טענה: אם בגרף לא מכוון וקשיר ***יש 2 צמתים מדרגה אי זוגית ושאר הצמתים מדרגה זוגית***, זהו תנאי הכרחי ומספיק לקיום מסלול אויילר בגרף.

<u>הערות</u>:

- התוספת כי הגרף קשיר, בשונה מהכתוב בשאלה, הינה הנחה מותרת, שכן אם הגרף אינו קשיר, פשוט נבדוק כל אחד מרכיבי הקשירות שלו.
- כמו כן, ניתן להוסיף לתנאי ההכרחי והמספיק את האפשרות שיהיו 0 צמתים מדרגה אי זוגית, ומקרה זה הוא מעגל אויילר והוא מקרה פרטי של מסלול אויילר, אך לא נתייחס למקרה זה בהוכחה, אלא רק למקרה בו יש 2 צמתים בדיוק מדרגה אי זוגית.

הוכחה:

כדי להוכיח שתנאי זה הכרחי ומספיק, נוכיח יחס אמ"ם.

<u>"<="</u>:

נתון גרף $G=(V, E)$ לא מכוון וקשיר המכיל מסלול אויילר. נסמן את צומת ההתחלה ב-v1 ואת צומת הסיום ב-v2. כיוון שהמסלול הינו מסלול אויילר, אל כל צומת במסלול נכנסים דרך קשת אחת ויוצאים בקשת אחרת, (יתכנו מספר מעברים בכל צומת במסלול), ולכן דרגת כל צומת באמצע המסלול היא זוגית. כיוון שיצאנו מצומת v1 ואנו לא חוזרים אליו (זה יהיה מעגל אויילר, לא המקרה המוצג בהוכחה זו), ויתכנו מספר מעברים בצומת זה הכוללים קשת כניסה וקשת יציאה, נקבל כי דרגת v1 הינה אי זוגית (זוגות קשתות כניסה ויציאה + קשת יציאה ראשונה). כמו כן המסלול מסתיים ב-v2, כאשר יתכנו מעברים קודמים לסיום המסלול ב-v2 הכוללים קשת כניסה וקשת יציאה לכל מעבר (מספר זוגי של קשתות), אשר בנוסף לקשת הכניסה האחרונה ל-v2 (זו המסיימת את המסלול), נותנים לנו מספר אי זוגי של קשתות מ-v2, כלומר דרגתו אי זוגית. מכאן, קיבלנו כי v1 ו-v2 הם שני הצמתים בעלי הדרגה האי-זוגית, בעוד שאר הצמתים במסלול האויילר בו הלכנו הם מדרגה זוגית.

<u>"=>"</u>:

נתון גרף $G=(V, E)$ לא מכוון וקשיר, בו בדיוק שני צמתים בעלי דרגה אי זוגית (והשאר בעלי דרגה זוגית). להלן אלגוריתם למציאת מסלול אויילר: נסמן את שני הקודקודים בעלי הדרגה האי זוגית כ-v1,v2. בה"כ נתחיל את המסלול מ-v1, וכיוון שהתחלנו בו, כעת "נותרו" לו מספר זוגי של קשתות ונתייחס אליו כאילו דרגתו זוגית. נמשיך אם כן מ-v1 במסלול שרירותי מבלי לעבור באותה קשת פעמיים עד שנעצר, וכיוון שכל צומת פרט ל-v2 מכיל מספר זוגי של קשתות, לכל צומת כזה ניתן להיכנס בקשת אחת ולצאת באחרת, ולכן ניעצר רק כאשר נגיע ל-v2 (שהוא היחיד שיכול להגיע למצב בו מובילה אליו קשת אחת בלבד בה מותר לנו לעבור ע"פ תנאי מסלול אויילר, ולא תהיה לנו קשת לצאת ממנו). כעת נחזור אחורה ונסתכל על כל החלקים שפספסנו בדרך. כיוון שהם מכילים רק צמתים בעלי דרגה זוגית, ניתן לעבור בהם במעגל אויילר. למשל, אם ישנו מסלול מעגלי היוצא וחוזר לצומת u כלשהו, נצא מ-u, נלך במעגל (כל צומת בדרך בעל דרגה זוגית ולכן לכל קשת כניסה אליו יש קשת יציאה) ונחזור ל-u. אם בדרך היו חלקים בהם לא עברנו, נחזור אליהם באותו אופן, וכך באופן רקורסיבי נעבור על כל הצמתים בגרף. לבסוף נוסיף רקורסיבית למסלול את כל החלקים שבהם עברנו (אם למשל יש מעגל מ-u, כאשר נגיע ל-u במסלול הראשוני בו הלכנו, נעבור תחילה במעגל שגילינו ב-u ולאחר מכן נמשיך מ-u במסלול המקורי).

מכאן, בנינו מסלול אויילר מצומת v1 אל צומת v2.

הוכחת נכונות:

הוכחת הנכונות טמונה בגוף ההוכחה, אך בכל זאת נחזור ונדגיש :

- עבור הכיוון הראשון, צמתים v1 ו-v2 הנם בעלי דרגה אי זוגית, כיוון שבכל פעם שעוברים בהם נכנסים בקשת אחת ויוצאים באחרת => זוג קשתות על כל מעבר, וזאת בנוסף לקשת היציאה של v1 / קשת הכניסה של v2. סה"כ – לשניהם דרגה אי זוגית.
- עבור הכיוון השני, כאשר נצא מ-v1 בעל הדרגה האי זוגית, הוא יהפך לבעל דרגה זוגית. לכן, בהכרח נעצר בצומת היחיד בעל הדרגה האי זוגית – v2 – כיוון שהוא היחיד שיכול להגיע למצב בו יש קשת כניסה אליו, אך אין ממנו יותר קשתות ליציאה.
- עבור הכיוון השני, כל צומת (לאחר היציאה הראשונה מ-v1 ופרט ל-v2) הוא בעל דרגה זוגית ולפיכך מאפשר מעבר בו לפי תנאי המסלול, כיוון שלכל קשת כניסה תהיה קשת יציאה שונה ממנה.
- עבור הכיוון השני, כל עוד לא נתקענו ב-v2 נוכל להמשיך, ומכיוון שבכל צעד "מנטרלים" אפשרות לעבור בקשת בה כבר עברנו, ומספר הקשתות סופי, בשלב מסויים לא נוכל להמשיך ונסיים ב-v2.
- עבור הכיוון השני, אם נשארו קשתות משמע שנשאר לפחות צומת אחד u שיש לו קשתות, כיוון שהגרף קשיר. לכן נוכל להמשיך ולהגדיל את המסלול עד שנעבור על כל הקשתות, ולבסוף נקבל מסלול אויילר.

סיבוכיות זמן ריצה (עבור האלגוריתם המתואר בכיוון השני):

- נחזיק את המסלול ברשימה מקושרת עם מצביעים לצמתים. נתחיל מ-v1 במסלול אקראי עד שנעצר, כאמור, ב-v2. כל מעבר לצומת הבא במסלול הוא ב-$O(1)$.
- כעת נעבור על המסלול מתחילתו, ועבור כל צומת u שנותרו לו קשתות, נצא ממנו דרך אחת הקשתות שטרם עברנו בה וננוע במסלול אקראי שיהיה, כאמור, מעגל אויילר עד שנחזור אל אל u. כך נמשיך עד שלא יוותרו ל-u קשתות שלא עברנו בהם. את המסלולים הנוספים (מעגלים) בהם הלכנו, נוסיף לרשימה המקורית **אחרי** u. כל מעבר בקשת שעשינו בשלב זה מתבצע ב-$O(1)$.
- את אותו תהליך נעשה על כל הצמתים ברשימה אחד אחרי השני (לא יווצר מצב בו נבדוק צומת שוב, לאחר שנקבע עליו כי לא נותרו לו קשתות). בסה"כ עברנו בתהליך על כל הקשתות בגרף, כאשר מעבר על כל קשת עלה לנו $O(1)$. מכאן שסיבוכיות האלגוריתם היא $\mathbf{O(|E|)}$.

(2)

א.

- גרף $G=\{V, E\}$ מכוון וקשיר מכיל מעגל אויילר אמ"מ לכל $v\in V$ מתקיים : $d_{in}(v) = d_{out}(v)$.
- גרף $G=\{V, E\}$ מכוון וקשיר מכיל מסלול אויילר אמ"מ קיימים שני צמתים $u,w\in V$ המקיימים: $d_{out}(u) = d_{in}(u) +1$, $d_{in}(w) = d_{out}(w) + 1$, ובנוסף לכל $v\in V\backslash\{u,w\}$ מתקיים : $d_{in}(v) = d_{out}(v)$.

הוכחה:

ההוכחה דומה למקרה הלא מכוון, כך שרק נוסיף הערות והסברים למקרה המכוון, והערות על המקרה של מעגל אויילר (שהוא כאמור מקרה פרטי של מסלול אויילר) :

- עבור המקרה הלא מכוון, ההוכחה עבור מעגל אויילר יכולה לנבוע מההוכחה עבור מסלול אויילר: פשוט "נחבר" יחד את v1 ו-v2 לצומת יחיד v כך שהקשתות היוצאות ממנו הן הקשתות המקוריות של v1 ו-v2. במקרה זה נקבל כי v שקיבלנו הוא בעל דרגה זוגית (חיבור שתי דרגות אי-זוגיות), וכי האלגוריתם למציאת מעגל אויילר ניתן להתחלה מכל צומת, שכן כעת כל הצמתים הנם בעלי דרגה זוגית, ואין זה משנה מאיזה אחד נתחיל.

- מסלול אוילר, המקרה המכוון: בדומה למקרה הלא מכוון, נתחיל את המסלול מהצומת בו דרגת היציאה גבוהה ב-1 מדרגת הכניסה, הוא צומת u, ונסיים בצומת בו דרגת הכניסה גבוהה ב-1 מדרגת היציאה, הוא צומת w. בדומה למקרה הלא מכוון, נשים לב כי:
  - ברגע שיצאנו מ-u, דרגת הכניסה ודרגת היציאה של u זהות, ולכן משלב זה לכל קשת שניכנס דרכה ל-u, תהיה לנו קשת לצאת מ-u.
  - ניתן לעבור דרך w כך שעל כל קשת כניסה אליו תהיה לנו קשת יציאה ממנו, עד קשת הכניסה האחרונה, לה אין "בת זוג", כלומר קשת ממנה נוכל לצאת. לפיכך המסלול יסתיים ב-w.
  - כל צומת בו נעבור בדרך הוא בעל דרגות כניסה ויציאה זהות, ולכן על כל קשת כניסה לכל צומת בדרך תהיה לנו קשת יציאה ממנו.

למעשה ניקח את המקרה הלא מכוון, נריץ את האלגוריתם ובסיומו "נסמן ראשי חיצים" על כל קשת בהתאם לכיוון בה זזנו, ובהתאם לכתוב לעיל נקבל את התנאים האמורים על צומת התחלת המסלול, צומת הסיום ושאר צמתי הגרף.

- מעגל אוילר: בדומה לנקודה הראשונה, נקח את המקרה של מסלול אוילר בגרף מכוון ונאחד את u ו-w לכדי צומת אחד t, כך שכל קשתות u ו-w עוברות ל-t. מכאן נקבל כי:

$$\mathbf{d_{in}(t)} = d_{in}(u) + d_{in}(w) = d_{out}(u) - 1 + d_{out}(w) + 1 = d_{out}(u) + d_{out}(w) = \mathbf{d_{out}(t)}$$

ומכאן כי דרגות הכניסה והיציאה של t זהות, ולכן כל צמתי הגרף מקיימים שוויון בין דרגת הכניסה לדרגת היציאה.

סיבוכיות:

כיוון שהאלגוריתם זהה מעט שינויים קלים, גם כאן סיבוכיות זמן הריצה תהיה $\mathbf{O(|E|)}$.

ב. **טענה:** בגרף לא מכוון וקשיר $G=\{V, E\}$ יש בדיוק 2k קודקודים מדרגה אי-זוגית, אז ניתן לחלק את קשתותיו ל-k מסלולים זרים (בקשתות).

הוכחה:

נריץ את האלגוריתם הבא על הגרף הנתון, והוא יבנה k מסלולי אויילר זרים:

(0) לצורך ההוכחה נסמן את קבוצת כל הצמתים בעלי דרגות אי זוגיות כ-'V, כך שנתון $|V'|=2k$. נבנה את 'V ע"י מעבר על כל $v \in V$ ובדיקת $d(v)$. כמו כן, נבנה וקטור באורך k שיחזיק רשימות מקושרות המתארות את המסלולים השונים שנמצא.

(1) נבחר צומת $v1 \in V'$ ונתחיל ללכת ממנו במסלול אקראי כלשהו עד שנעצר. כל קשת מ-E בה נעבור, נסמן (כדי שלא נעבור בה שוב) ונוסיף לרשימה מקושרת שתייצג את המסלול הנוכחי שאנו בונים. אנו נעצר בהכרח בצומת בעל דרגה אי זוגית אותו נסמן v2, והוא שונה מ-v1 (ראה הוכחת נכונות). כאשר נתקע נסיר מ-'V את v1 ו-v2.

(2) נחזור על שלב (1) עבור כל צומת $v \in V'$ עד ש-$V'=\{\}$, וסיימנו.

כיוון שכל מסלול מתחיל בצומת מ-'V ונגמר בצומת אחר ב-'V, וכל המסלולים זרים (בנינו מסלולי אויילר), וגודל 'V הוא 2k, קיבלנו k מסלולים זרים.

הוכחת נכונות:

- שלב (0) טרוויאלי ומיידי.
- עבור ריצה מסויימת של שלב (1), ברגע שיצאנו מ-v1, "השתמשנו" בקשת אחת שלו ולכן דרגתו המדומה (מספר הקשתות שאנו רשאים לעבור בהם כעת) היא זוגית. כעת כל צומת בו נעבור (כולל v1 לאחר שיצאנו ממנו) יאבד מדרגתו המדומה 2: אחת על קשת הכניסה ואחת על קשת היציאה (ולכן כל מעבר בצומת משמר את דרגתו), פרט לצומת בעל דרגה אי זוגית בגודל 1, אותו ניתן לקבל או ע"י הגעה לצומת שמלכתחילה היה בעל דרגה 1, או צומת בעל דרגה אי זוגית > 1 בו עברנו כבר מספר פעמים, כאשר בכל מעבר הורדנו מדרגתו 2. ברגע שניכנס לצומת כזה, דרגתו המדומה תתאפס, ולא יהיו ממנו יותר קשתות בהן נוכל לעבור, ולכן צומת זה יהיה v2 וזהו סוף המסלול המסויים אותו אנו בונים.
- בשלב (1) v1 יהיה שונה מ-v2 כיוון שכאמור ברגע שיצאנו מ-v1, דרגתו המדומה נהייתה זוגית, וכמתואר לעיל אנו ניעצר אך ורק בצומת בעל דרגה אי זוגית, ולכן בהכרח v2 בו נעצר אינו v1 ממנו התחלנו.
- אחרי כל מציאת מסלול אנו מסירים את צומת ההתחלה וצומת הסיום שלו מ-'V, וכיוון ש-'V היא קבוצה סופית של צמתים בגודל 2k, לאחר מציאת k מסלולים <u>בדיוק</u> 'V תהיה קבוצה ריקה והאלגוריתם יעצר.
- כיוון שאנו מסמנים כל קשת בה עברנו ובונים מסלולי אויילר, כל המסלולים יהיו זרים (יתר על כך, לא יהיה מעבר חוזר על קשת אף <u>בתוך</u> מסלול מסויים כלשהו).

סיבוכיות זמן ריצה:

- בניית וקטור באורך k + מעבר על כל הצמתים ב-V לבניית 'V = $O(|V|) + O(1)$ שזה $O(|V|)$.
- שלב (1) חוזר על עצמו k פעמים (לבניית k מסלולים זרים), אך מה שקובע בכל איטרציה של שלב (1) את זמן הריצה הוא מס' הקשתות עליהן עברנו, שכן מעבר מסוף מסלול אחד לתחילת חישוב השני מתבצע ב-$O(1)$ (מעבר לצומת הבא ב-'V).
- בסוף האלגוריתם עברנו על כל הקשתות פעם אחת בדיוק, כאשר מעבר מקשת לקשת הוא ב-$O(1)$, לכן סך המעברים בקשתות הוא $O(|E|)$.

סה"כ קיבלנו כי זמן הריצה הוא $O(|V|+|E|)$ וכיוון שהגרף קשיר ו-$|V|\leq|E|-1$, סה"כ זמן הריצה הוא $\mathbf{O(|E|)}$.

(3)

נתון גרף לא מכוון $G=\{V, E\}$ בו כל הצמתים בעלי דרגה 4. ניתן להניח כי הגרף קשיר, אחרת נוכיח על כל אחד מרכיבי הקשירות שלו. כיוון שכל הדרגות בגרף זוגיות, קיים בגרף מעגל אויילר. נבחר צומת כלשהו u להתחיל ממנו את האלגוריתם למציאת מעגל אויילר, ונגדיר תוספת: כל קשת בה נעבור נצבע בכחול וזו שאחריה באדום וחוזר חלילה, ובה"כ נקבע כי הקשת הראשונה תצבע אדום. אם נסתכל על כל צומת פרט ל-u, כיוון שדרגתו 4, כל כניסה ויציאה תצבע שתיים מקשתותיו בשני צבעים שונים, ובסך הכל נקבל כי לכל צומת פרט ל-u יש 2 קשתות אדומות ו-2 קשתות כחולות. עבור u, ידוע כי סכום הדרגות בגרף לא מכוון שווה ל-$2|E|$, והרי במקרה זה סכום הדרגות הוא 4 x מספר הצמתים, ולכן $|E| = 2|V|$, כלומר מספר הקשתות זוגי. לכן, הקשת האחרונה שתיכנס ל-u בהכרח תהיה כחולה. דוגמא להמחשה - נציג את התרשים הבא בו מספר הקשתות זוגי:

$$v1 \rightarrow v2 \rightarrow v3 \rightarrow v4 \rightarrow v5 \rightarrow v6 \rightarrow v1$$

כאשר v1 נמצא גם בהתחלה וגם בסוף המסלול, כיוון שזהו מעגל. לפיכך, לכל צומת בגרף שתי קשתות אדומות ושתי קשתות כחולות.

(4)

n מהקודקודים הם בעלי דרגה m, ו-m מהקודקודים הם מדרגה n.

מעגל אויילר: מעגל אויילר יהיה כאשר דרגות כל הקודקודים הן זוגיות, כלומר עבור n ו-m זוגיים.

מסלול אויילר: ניתן לקבל מסלול אויילר עבור 2 צמתים בדיוק בעלי דרגות אי זוגיות, ותנאי זה מתקיים עבור $m=n=1$ או עבור $m/n=2$ ו-n/m אי זוגי (בהתאמה; אז נקבל 2 צמתים מדרגות אי זוגיות ושאר הצמתים מדרגה 2 – שהיא זוגית).

(5)

להלן תיאור אלגוריתם לפתרון בעיית אבני הדומינו:

הערה: כיוון שנדרש לבדוק אפשרות להצבת האבנים בשורה, לא נתייחס לאפשרות להצבתם במעגל כאפשרות חוקית.

- נבנה גרף לא מכוון $G=\{V, E\}$ כאשר $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ - כל צומת מייצג ספרה אפשרית לאבן הדומינו, ו-E מכילה עבור כל אבן דומינו קשת המורכבת משני מספריה. למשל, עבור אבן 4,5 תהיה קשת (4,5).
- נבדוק את דרגות הצמתים ב-V. אם יש שני צמתים בדיוק בעלי דרגה אי זוגית, נעבור לשלב הבא. אחרת, **נחזיר F** – לא קיימת אפשרות חוקית להצבת אבני הדומינו בשורה.
- אם כן קיימת אפשרות חוקית, נבחר את אחד הצמתים בעלי הדרגה האי זוגית, ונריץ ממנו את אלגוריתם מציאת מסלול אויילר (מתקיימים התנאים לקיומו). אם בסוף מציאת המסלול נותרו קשתות בהן לא עברנו, **נחזיר F**.
- נחזיר את המסלול המתקבל מהאלגוריתם, אשר הוא סידור חוקי בשורה של כל אבני הדומינו הנתונות.

הוכחת נכונות:

- הגרף הנבנה ייצג נאמנה את מה שרוצים לבדוק, שכן מציאת מסלול אויילר שקולה למציאת רצף לבנים חוקי כלשהו בו משתמשים בכל לבנה בדיוק פעם אחת.
- אם אין שני צמתים בדיוק בעלי דרגה אי זוגית, לא קיים מסלול אויילר בגרף, ובאופן שקול לא קיימת שורה חוקית של לבני דומינו מהקבוצה הנתונה.
- נכונות הרצת אלגוריתם מציאת מסלול אויילר ידועה. אם במציאת מסלול נותרו קשתות שלא עברנו בהן, האופציה היחידה לכך היא שהגרף אינו קשיר - ובמקרה זה בודאי שאין סידור חוקי, לכן יוחזר F.
- המסלול המוחזר הינו התשובה הנכונה, שכן הוא מייצג רצף חוקי בשורה של אבני הדומינו הנתונות.

סיבוכיות זמן ריצה:

- שלב הבניה עולה $O(|E|)$, כאשר במקרה זה $|E|$ הוא מספר הלבנים (= מספר הקשתות). בניית V בזמן $O(1)$.
- בדיקת דרגות הצמתים גם ב-$O(1)$.
- אלגוריתם מציאת מסלול אויילר: $O(|E|)$.

סה״כ: סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $\mathbf{O(|E|)}$.

(6)

להלן תיאור אלגוריתם לבדיקת גרף לא מכוון $G=\{V, E\}$ האם הוא **כמעט דו-צדדי**:

הערה: ניתן להניח כי הגרף קשיר. אם הגרף אינו קשיר נריץ את האלגוריתם על כל רכיב קשירות, כאשר מותרת הימצאות של קשת אחת בלבד עבור <u>כל</u> רכיבי הקשירות יחד (ולא אחת לכל רכיב קשירות) – כך שאם מצאנו קשת כזו ברכיב קשירות כלשהו, כל שאר רכיבי הקשירות צריכים להיות דו-צדדיים.

- נבחר צומת כלשהו ונריץ עליו אלגוריתם BFS. נעבור על כל הרמות עד שנמצא קשת המחברת בין שני צמתים באותה רמה. אם לא מצאנו, אזי הגרף הוא דו״צ וסיימנו **ונחזיר T**. אחרת, נעבור לשלב הבא.

- הקשת אותה מצאנו נמצאת על מעגל באורך אי זוגי. כעת נבצע את הפעולות הבאות על כל אחת מהקשתות:
  - o נסיר את הקשת מהגרף ונריץ שוב BFS על הגרף.
  - o אם הגרף דו"צ, סיימנו, **ונחזיר T**.
  - o אחרת, נחזיר את הקשת שהסרנו, ונעבור לבדיקה על הקשת הבאה.
- אם אחרי האיטרציה האחרונה של השלב הקודם הגרף אינו דו"צ, **נחזיר F**.

הוכחת נכונות:

- הרצת BFS מאפשרת לבדוק האם גרף הינו דו"צ: כפי שהוכח בכיתה, אם לא קיימות קשתות המחברות בין צמתים באותה דרגה, ניתן לשים בצד אחד את כל הצמתים בעלי הדרגה הזוגית ובצד שני את כל הצמתים בעלי הדרגה האי זוגית, ונקבל גרף דו"צ.
- נתבסס על טענה שהוכחה בכיתה: גרף לא מכוון הוא דו"צ <=> אין בו מעגל באורך אי זוגי. על כן, אם מצאנו קשת בין שני צמתים באותה רמה, היא משוייכת למעגל באורך אי זוגי (עבור קשת (u,v), המרחק של u ושל v מהאב הקדמון המשותף שלהם זהה, נסמנו j, ומכאן המעגל אליו שייכת הקשת היא באורך 2j+1 – אי זוגי), וכדי לקיים את תנאי הדו"צ נצטרך להסיר קשת אחת (כפי שההגדרה מאפשרת לנו) ונגיע למעגל זוגי, ותחת הנחה שאין עוד מעגלים אי זוגיים – אנו מקיימים את התנאי השמאלי בטענה ומכאן הגרף הוא דו"צ.
- אנו צריכים לעבור על כל קשת וקשת במעגל האי זוגי, כיוון שלא בטוח שהקשת (u,v) שמצאנו המחברת בין שני צמתים באותה רמה היא הקשת שאם נסיר אותה נקבל גרף דו"צ, וזה נובע מכך ש-BFS יכול לרוץ מכל צומת בגרף, וכל פעם נקבל (u,v) שונה (הקשת ממנה מתחילים), אך ברור כי הקשת אותה מחפשים להסיר הינה יחידה. ברגע שמצאנו את הקשת הנכונה, כל צומת שנריץ ממנו BFS יניב גרף דו"צ. על כן יש לבצע את כל הבדיקות בשלב השני.
- אם אחרי האיטרציה האחרונה הגרף אינו דו"צ, משמע שקיימת עוד קשת שנצטרך להסיר כדי להביא את הגרף להיות דו"צ. כיוון שכבר "בזבזנו" את הקשת שאנו יכולים להסיר, הגרף אינו כמעט דו"צ.

סיבוכיות זמן ריצה:

- הרצה ראשונית של BFS ומציאת קשת באותה רמה לוקחת $O(|V|+|E|)$ אך כיוון שהגרף קשיר מתקיים $|V|\leq|E|-1$ ולכן שלב זה הוא $O(|E|)$.
- ברגע שמצאנו מעגל אי זוגי, אורכו יכול להיות לכל היותר $|V|-1$ (אם הוא מכיל את כל הצמתים בגרף), ועבור על קשת במעגל אנו מריצים BFS בזמן $O(|E|)$. סה"כ שלב זה לוקח $O(|V|\cdot|E|)$.

סה"כ: סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם היא $\mathbf{O(|V|\cdot|E|)}$.

(7)

א. להלן תיאור אלגוריתם למציאת קשתות מעגליות בגרף לא מכוון:

- נריץ אלגוריתם BFS מ-s.
- נעבור על כל הקשתות (u,v) בגרף ולכל קשת נבצע את הפעולה הבאה:
  - o אם $d(u) = d(v)$ הסר את הקשת (u,v) מ-E והוסף אותה לרשימת הקשתות המעגליות.
  - o אחרת הסר את הקשת (u,v) מ-E.
- נחזיר את רשימת הקשתות המעגליות שבנינו.

הוכחת נכונות:

- ה-BFS מחלק את כל הצמתים לרמות לפי מרחקיהם מצומת s, ולפיכך, אם לשני צמתים u,v מתקיים כי d(u)=d(v) אזי מרחקיהם מ-s שווים, וכיוון שקיימת ביניהם קשת – (u,v) – אזי קשת זו היא מעגלית.
- האלגוריתם עובר על כל הקשתות ב-E ולכן יחזיר את כל הקשתות המעגליות בגרף.

סיבוכיות זמן ריצה:

- הרצת ה-BFS: $O(|V|+|E|)$
- מעבר על כל הקשתות ובניית רשימת הקשתות המעגליות: $O(|E|)$

סה"כ סיבוכיות האלגוריתם היא $O(|E|+|V|)$

ב. נשנה את אלגוריתם ה-BFS באופן הבא:

1) סיבית אחת נקח לסימון הצבע כך שלבן יהיה "0" ואפור יהיה "1" (ניתן להוריד את שלב הצביעה בשחור, הוא מיותר). וכך, כל בדיקה האם צבע הוא לבן תהפוך לבדיקה האם color(u)=0, וכל צביעה לאפור תהפוך ל-color(u)←1.

2) סיבית שניה נקח לסימון המרחק באופן הבא: המרחק ההתחלתי של כולם יאותחל ל-0; כל עדכון מרחק במהלך ריצה על adj[u] תהיה: d(v) ← not(d(u)).

כעת בסיום ה-BFS המתוקן, נעבור על כל הקשתות (u,v) בגרף ונבדוק:

3) אם d(u)=d(v) נסיר את הקשת ונכניסה לרשימת הקשתות המעגליות.

4) אחרת נסיר את הקשת מ-E.

לבסוף נחזיר את רשימת הקשתות המעגליות.

הוכחת נכונות:

5) ברור כי שני צבעים (לבן ואפור, שוב – השחור אינו רלוונטי) ניתן לייצג באחד מהביטים, וכי השינוי באלגוריתם מתייחס לייצוג הצבע.

6) ב-BFS כל קשת בגרף לא מכוון עוברת בין שני צמתים באותה רמה או ברמות עוקבות, ולכן הזוגיות של ביט המרחק מספיקה בכדי לקבוע האם שני צמתים נמצאים באותה רמה או ברמות עוקבות. אם שניהם באותה רמה, אזי ביט המרחק יקבל בשניהם "0" או בשניהם "1", וכיוון שהם באותה רמה, אזי מרחקם מ-s זהה ולכן הקשת (u,v) במקרה זה הינה מעגלית.

סיבוכיות זמן ריצה:

כיוון שפרט לייצוג ושינויים שטחיים האלגוריתם זהה לזה שבסעיף א', גם כאן הסיבוכיות היא $O(|E|+|V|)$.

(8)

להלן תיאור אלגוריתם למציאת מעגל מכוון קצר ביותר בגרף מכוון $G=\{V,E\}$:

- צור רשימה באורך |V| אותה נמלא בהמשך.
- לכל $v\in V$ בצע את הפעולות הבאות:
  - בצע BFS החל ב-v.
  - עבור על כל $e\in E$ ומצא את u מקשת (u,v) כך ש-d(u) מינימלי. אם לא קיימת קשת כזו או שהערך היחיד הוא ∞, שים ברשימה מהשלב הראשון null, אחרת שים שם את (u,v).

- אם הרשימה מחזיקה רק ערכי null, סיים. אחרת:
- מצא את u עם $d(u)$ מינימלי מהקשתות (u,v) ברשימה מהשלב הראשון, אותה מילאנו (יהיו יותר מאחד).
- בנה מסלול לפי מצביעי ה-π החלק מ-u עד ל-v. הפוך את המסלול והחזר את התוצאה.

הוכחת נכונות:

- BFS מצומת v כלשהו נותן לכל u שניתן להגיע אליו מ-v את המרחק הקצר ביותר מ-v אל u. צמתים אליהם לא ניתן להגיע מ-v ישארו עם מרחק "∞". לכן אם נעבור עבור v כלשהו על כל הקשתות (u,v), הרי שאם $d(u) < \infty$ אז ניתן להגיע מ-v אל u, וכיוון שיש לנו קשת (u,v), הרי לנו מעגל. כמו כן, ברור כי u בעל ערך $d(u)$ הקטן ביותר – היא חלק ממעגל קצר ביותר העובר דרך v.
- הרשימה תהיה כולה איברי null אך ורק כאשר לכל צומת u עליו עברנו: או שאין קשתות הנגמרות בו, כלומר אין מסלולים שמגיעים אליו (ובפרט מעגליים), או שהקשתות המגיעות אליו מגיעות מצומת v בעל $d(v)=\infty$ ביחס ל-DFS שביצענו על u, ולפיכך צומת v אינו נגיש מ-u ולכן אינו חלק ממסלול מעגלי. לכן, אם כל הרשימה null אזי לא קיימים מסלולים מעגליים, ולכן נסיים.
- כיוון שעוברים על כל הצמתים ב-V, ומכולם מוצאים מעגל קצר ביותר, הרי שמביניהם המעגל הקצר ביותר הוא הוא המעגל אותו מחפשים – הקצר ביותר בכל הגרף.
- מצביעי π הולכים בכיוון הנגדי לקשתות, ולוקחות אותנו מ"סוף" המעגל אל "תחילת" המעגל, ולכן את תוצאת המסלול צריך להפוך – בכדי לקבל את המסלול המעגלי כפי שניתן ללכת בו בגרף, החל מ-v ועד u (ומעגלי).

סיבוכיות זמן-ריצה:

- השלב הראשון ב-$O(1)$
- השלב השני מבצע BFS ב-$O(|V|+|E|)$ לכל צומת, ולכן סה"כ: $O(|V|*[|V|+|E|])$ – אך בגרף לא מכוון זה שווה ל-$O(|V|*|E|)$, ובגרף לא מכוון נפעיל את האלגוריתם על כל אחד מרכיבי הקשירות, ולבסוף נעבור על המינימום של כולם – ולכן נקבל גם $O(|V|*|E|)$.
- מציאת u עם $d(u)$ מינימלי מהרשימה ב-$O(|V|)$.
- בניית המסלול המעגלי אותו נחזיר ב-$O(|E|)$.

סה"כ: הסיבוכיות המבוקשת – $O(|V|*|E|)$.

(9)

להלן האלגוריתם למציאת גרף המסלולים הקצרים ביותר (כפי שהיה בתרגול):

- ע"י הרצת BFS מ-s נמצא את גרף המסלולים הקצרים ביותר מ-s ונסמנו ב-G'. אם $t \notin G'$ אזי אין מסלול מ-s ל-t ולכן נחזיר גרף ריק. אחרת:
- נהפוך את קשתות G' ונמצא ע"י הרצת BFS מ-t את גרף המסלולים הקצרים ביותר מ-t על הגרף ההפוך.
- נמחק מ-G' את הקשתות והקדקודים שלא הגענו אליהם בשלב השני, ונחזיר את הגרף G'' שהתקבל (אחרי שהפכנו את הקשתות בחזרה).

הוכחת נכונות:

קשתות:

קשת (u,v)ב-"G ⇔ הקשת (u,v) נמצאת בגרף המסלולים הקצרים מ-s ל- t:

"←":

קשת (u,v) שנשארה אחרי שלב 1 נמצאת ב-'G, ולכן נמצאת על מסלול מ- s: s, …, u, v,…,x.

כיוון ש-(u,v) נשארה אחרי שלב 3, ההופכית שלה נמצאת בגרף המסלולים הקצרים מ-t ולכן קיים ב-'G מסלול:

t, ..., y, ...,u, v. בעזרת שני המסלולים האחרונים אנו מסיקים שקיים מסלול s, ..., u, v,..., t ב-"G.

כל מסלול ב-"G הוא גם מסלול קצר ביותר מ-s: מהגדרת 'G, לכל קשת (x,y) במסלול כזה מתקיים $d(y)=d(x)+1$.

מכאן ש- $d(t)$ שווה למס' הקשתות במסלול, כלומר, זהו מסלול קצר ביותר מ-s ל-t.

"→":

נניח (u,v) נמצאת על מסלול קצר ביותר s, …, u, v, …, t. בפרט, כל הקשתות בקטע u, v, …, t נמצאות על מסלול קצר ביותר מ-s, ולכן נמצאות ב-'G. כשהופכים קשתות אלו מקבלים מסלול קצר ביותר מ-t ל-u, ולכן כשנסרוק קשתות אלו בשלב השלישי הם יישארו ב-"G.

קודקודים:

כל צומת v ב- "G הוא בעל דרגה גדולה מ-0, כלומר בעל קשת (u,v), אחרת הוא לא היה ב-'G. הוכחנו ש- (u,v) ב- "G אם ורק אם היא על מסלול קצר ביותר בין s ל-t, ולכן v ב-"G אם ורק אם הוא על מסלול כזה.

סיבוכיות זמן ריצה:

- שלב ראשון הוא הרצת BFS – $O(|E|+|V|)$.
- שלב שני הוא היפוך קשתות 'G – $O(|E|)$, והרצה נוספת של BFS – $O(|E|+|V|)$.
- שלב שלישי הוא מחיקת צמתים וקשתות מ-'G והיפוך "G – $O(|E|+|V|)$

סה"כ: $O(|E|+|V|)$.